2015/16

**Analyse Numérique (LM64)**

Examen (24 mai 2016)

Temps: 3 heures

1. (Décomposition $QR$).

   i) **[2 points]** Donnée une matrice $A$ inversible, montrer que sa décomposition $A = QR$ avec $Q$ orthogonale et $R$ triangulaire supérieure à coefficients diagononaux positifs est unique (on ne demande pas l'existence de la décomposition).

   ii) **[4 points]** Donnée la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

   écrire sa décomposition $QR$.

2. (Norme induite, rayon spectrale et conditionnement).

   i) **[2 points]** Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $||\cdot||$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Définir:

      a) La norme (matricielle) $||\cdot||$ induite sur $M_n(\mathbb{R})$.

      b) Le rayon spectrale $\rho(A)$.

      c) Le conditionnement $\text{cond}(A)$ associé à la norme induite $||\cdot||$ (où $A$ est inversible).

   ii) **[3 points]** On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||\cdot||_2$ et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $||\cdot||_2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer

$$||A||_2 = \left(\rho(A^t A)\right)^{\frac{1}{2}}$$

   En particulier, si $A$ est symétrique, $||A||_2 = \rho(A)$.

   iii) **[2 points]** Donnée une matrice orthogonale $Q$, on accepte que le conditionnement associé à la norme induite $||\cdot||_2$ satisfait $\text{cond}_2(Q) = 1$. On considère une application linéaire $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et deux bases orthonormées $B$ et $B'$ de $\mathbb{R}^n$. Si on note par $M$ et $M'$ les matrices de $\mathcal{M}$ dans $B$ et $B'$, respectivement, montrer que $\text{cond}_2(M) = \text{cond}_2(M')$.

3. (Méthodes itératives).

   Soient $A$ et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles. Soit la suite définie par

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x_0 \\ x^{(k+1)} &= Bx^{(k)} + c \end{aligned}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$.

   i) **[1 point]** Énoncer la condition nécéssaire et suffisante, en termes de $\rho(B)$, pour la convergence $x^{(k)} \to A^{-1}b$.

ii) **[4 points]** Donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad ,$$

écrire la matrice $B$ pour les méthodes de Richardson, Jacobi et Gauss-Seidel et déterminer les rayons spectrales $\rho(B)$ respectifs. Y a-t-il convergence pour ces méthodes? Pour quelle méthode la convergence est la plus rapide? Est-ce qu'il existe un choix du paramètre qui rend la convergenc de la méthode de Richardon plus rapide que celle de Jacobi?

4. (Vecteurs $A-$conjugués).

   **[2 points]** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $(w^{(1)}, \dots, w^{(p)})$ une famille de vecteurs ($p \leq n$). Montrer que si cette famille est $A-$conjuguée, alors elle est libre.