2016/17

**Analyse Numérique (LM64)**

Examen final (15 mai 2017)

Temps : 3h00

1. (Décomposition $QR$) **[6 points]**

   i) Étant donnée une matrice $A$ inversible, montrer que sa décomposition $A = QR$ avec $Q$ orthogonale et $R$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs est unique (on ne demande pas l'existence de la décomposition). **[2 points]**

   ii) Étant donnée la matrice $A$

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

   écrire sa décomposition $QR$. **[4 points]**

2. (Conditionnement) **[6 points]**
   Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $||\cdot||$ et $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite associée.

   i) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, définir le conditionnement de $A$ par rapport à $||\cdot||$. **[1 point]**

   ii) Soient $A$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles, montrer

   $$\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$$

   **[2 points]**

   iii) Étant donnée une matrice orthogonale $Q$, on accepte que le conditionnement associé à la norme induite $||\cdot||_2$ satisfait $\text{cond}_2(Q) = 1$. On considère une application linéaire $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et deux bases orthonormées $B$ et $B'$ de $\mathbb{R}^n$. Si on note par $M$ et $M'$ les matrices de $\mathcal{M}$ dans $B$ et $B'$, respectivement, montrer que $\text{cond}_2(M) = \text{cond}_2(M')$. **[1 point]**

   iv) On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $b$ et $\delta_b \in \mathbb{R}^n$, avec $b \neq 0$. Si $x$ et $\delta_x \in \mathbb{R}^n$ sont, respectivement, solutions de

   $$\begin{aligned} &Ax = b \\ &A(x + \delta_x) = b + \delta_b \ , \end{aligned}$$

   montrer

   $$\frac{||\delta_x||}{||x||} \leq \text{cond}(A)\frac{||\delta_b||}{||b||}$$

   **[2 points]**

3. (Méthodes itératives) **[6 points]**
   Soient $A$ et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles. Soit la suite définie par

   $$\left\{ \begin{array}{l} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{array} \right. \tag{1}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$.

i) Énoncer la condition nécessaire et suffisante, en termes du rayon spectrale $\rho(B)$, pour la convergence $x^{(k)} \to A^{-1}b$. [**1 point**]

ii) Étant donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad ,$$

a) Écrire la matrice $B$ pour les méthodes de Richardson, Jacobi et Gauss-Seidel et déterminer les rayons spectrales $\rho(B)$ respectifs. Spécifier dans chaque cas si la suite (1) est convergente. [**4.5 point**]

b) Pour quelle méthode la convergence est la "plus rapide" ? Est-ce qu'il existe un choix du paramètre qui rend la convergence de la méthode de Richardon plus rapide que celle de Jacobi ? [**0.5 points**]

4. (Vecteurs $A-$conjugués) [**2 points**]
Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $\{w^{(1)}, \dots, w^{(p)}\}$ une famille de vecteurs ($p \leq n$), montrer que si cette famille est $A-$conjuguée, alors elle est libre.