

2017/18

**Analyse Numérique (LM64)**

Examen final (10 janvier 2018)

Temps : 3h00

1. (Décomposition  $QR$ ) [4.5 points]

- i) Énoncer le théorème de décomposition  $QR$  d'une matrice. [1 point]
- ii) Étant donnée une matrice  $A$  inversible, montrer que sa décomposition  $QR$  est unique. [1.5 points]
- iii) Étant donnée la matrice  $A$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

écrire sa décomposition  $QR$ . [2 points]

2. (Valeurs propres) [6 points]

- i) Énoncer et montrer le théorème des cercles de Gershgorine. [3 points]
- ii) Étant donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & 3 & \gamma & \delta & \alpha \\ \gamma & \delta & 7 & \alpha & \beta \\ \delta & \alpha & \beta & 9 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 10 \end{pmatrix},$$

formuler une condition suffisante sur  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  garantissant que les valeurs propres de  $A$  sont toutes distinctes. [2 points]

- iii) Formuler une condition suffisante sur  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  garantissant que la matrice  $A$  est symétrique définie positive. [1 point]

3. (Méthodes itératives) [7.5 points]

Soient  $A$  et  $P \in M_n(\mathbb{R})$  matrices inversibles. Soit la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

avec  $B = I_n - P^{-1}A$  et  $c = P^{-1}b$ .

- i) Énoncer la condition nécessaire et suffisante, en termes du rayon spectral  $\rho(B)$ , pour la convergence  $x^{(k)} \rightarrow A^{-1}b$ . [1 point]
- ii) On considère la matrice, avec  $a \in \mathbb{R}$  arbitraire

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson [3 point], Jacobi [1.5 point] et Gauss-Seidel [1.5 point].
- b) Dans l'ensemble de valeurs de  $a$  pour lesquelles les trois méthodes convergent, quel est le classement de ces méthodes en fonction de leur vitesse de convergence respective ? [0.5 points]

4. (Méthode de la puissance) [**2 points**]

Appliquer le théorème de la convergence de la méthode de la puissance à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et à l'initialisation  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .