2019/20

Analyse Numérique (LM64)

Examen final (10 janvier 2020)

Temps : 3h00

1. (Décomposition QR et algorithme QR) **[3.5 points]**

   i) Énoncer et démontrer le théorème de décomposition QR d'une matrice. **[2 points]**

   iii) Étant donnée la matrice A

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

   a) Calculer les valeurs propres de A à partir du polynôme caractéristique. **[0.5 points]**

   b) Appliquer l'algorithme QR pour le calcul de vecteurs propres. Quel est le problème ? **[1 point]**

2. (Stabilité valeurs propres) **[7 points]**

   i) Énoncer et démontrer le théorème des cercles de Gershgorine. **[3 points]**

   ii) Si on considère la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

   vérifier le théorème de cercles de Gershgorine et l'illustrer en esquissant une figure. **[1 point]**

   iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $A(\epsilon) = A + \epsilon C$, avec $C \in M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Énoncer le résultat de stabilité des valeurs propres de A sous la perturbation ϵC en termes de la norme $||\cdot||_\infty$ de C. **[1 point]**

   iv) Si on considère la matrice

   $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} ,$$

   appliquer iii) pour trouver une borne supérieure pour ε garantissant que les valeurs propres de $A(\epsilon) = A + \epsilon C$ ne s'annulent pas (où A est donnée dans le point ii)). **[2 points]**

3. (Méthodes itératives) **[6 points]**

   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles et $b \in \mathbb{R}$. Dans le contexte du problème $Ax = b$, soit la suite définie par

   $$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$. On considère la matrice, avec $a \in \mathbb{R}$ ($a > 0$) arbitraire

   $$A = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} .$$

   i) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson **[2 points]**, Jacobi **[0.5 point]** et Gauss-Seidel **[0.5 point]**.

ii) Soit $||\cdot||$ la norme matricielle induite associée à une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$. Si l'erreur au pas k est défini par $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, montrer que si $||B|| < 1$ et k satisfait

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{1-||B||}{||x^{(1)}-x^{(0)}||}\right) - N\ln(10)}{\ln(||B||)} ,$$

alors $||e^{(k)}|| < 10^{-N}$. **[1 point]**

iii) Si on considère la norme $||\cdot||_2$, expliciter cette condition sur k (en termes de $x^{(1)}$, $x^{(0)}$ et N), pour :

a) Les matrices B_R et B_J correspondantes aux méthodes de Richardson et Jacobi, respectivement, pour les cas convergents déterminés dans i). **[1 point]**

b) La matrice B_{G-S} correspondante à la méthode de Gauss-Seidel, pour les valeurs de a appropriées. **[1 point]**

4. (Systèmes non-linéaires) **[3.5 points]**

i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. **[1.5 point]**

ii) Étant donné $a \in \mathbb{R}$ fixe, écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système **[1 point]** :

$$\begin{cases} r\cos\theta = a \\ r\sin\theta = 0 \end{cases}$$

iii) Discuter la convergence de l'algorithme si $a = 1$ et si $a = 0$. **[1 point]**