L3 Analyse Numérique (2019/20)

Contrôle Partiel (6 novembre 2019)

Temps : 2h00

1. (Décompositions LU et Choleski : théorie) **[5 points]**
   i) Énoncer les théorèmes de la décomposition LU et la décomposition de Choleski. **[1.5 points]**
   ii) Démontrer (existence et unicité) le théorème de décomposition de Choleski. **[3 points]**
   iii) Donner un exemple de matrice pour laquelle il n'y a pas une décomposition LU unique (expliciter au moins deux décompositions différentes). **[0.5 points]**

1. (Décompositions LU et Choleski : application) **[6 points]**
   i) Étant donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & -b & -b & -b \\ a & -b & c & c \\ a & -b & c & -d \end{pmatrix} ,$$

   où a, b, c et d sont des nombres réels :
   i.a) Donner la décomposition LU de A. **[1.5 points]**
   i.b) Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que A admette une décomposition de Choleski. **[0.5 points]**
   i.c) Écrire la décomposition de Choleski, en utilisant l'algorithme de Choleski, de la matrice A satisfaisant les conditions dans ii). **[1.5 points]**
   ii) Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ (inversible) on définit pour chaque ligne $i \in \{1, \dots, n\}$ l'entier j_i :

$$j_i = \min \{ j \in \{1, \dots\ n\} \ , \ \text{avec } (A)_{ij} \neq 0 \} \ .$$

   L'ensemble des nombres j_i définit le profil de A. Montrer que la décomposition de Choleski préserve le profil, c'est à dire : le profil de $\tilde{L}$ est le même que celui de A (où A satisfait les conditions du théorème de décomposition de Choleski). **[2.5 points]**

3. (Normes matricielles et conditionnement) **[9 points]**
   i) Étant données $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme $|| \cdot ||$ sur $\mathbb{R}^n$, définir la norme matricielle induite $|| \cdot ||$ sur $M_n(\mathbb{R})$ et le rayon spectral $\rho(A)$ de A. **[1 point]**
   ii) On considère $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire (hermitien) $\langle u, v \rangle = u^* v$, où $u^* = \bar{u}^t$, avec la norme $||u||_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. La norme induite en $M_n(\mathbb{C})$ est caractérisée par $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$. Montrer que pour une matrice normale inversible on a

$$||A^{-1}||_2 = \frac{1}{|\lambda_1|} ,$$

   où les valeurs propres de A satisfont $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$. **[2 points]**
   iii) Étant donnée la matrice (avec $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$)

$$A = \begin{pmatrix} a & b + \alpha \\ -b + \alpha & a \end{pmatrix}$$

   calculer les normes $||A||_1, ||A||_\infty$, $||A||_2$ et $||A||_F$ (Frobenius). **[2.5 points]**
   iv) Définir le conditionnement d'une matrice A sur $M_n(\mathbb{R})$. **[0.5 points]**
   v) Montrer : i) $\text{cond}(A) \geq 1$, ii) $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ et iii) $\text{cond}_2(Q) = 1$, pour Q orthogonal. **[1.5 points]**

vi) Déterminer la valeur de α qui optimise le conditionnement $\mathrm{cond}_2(A)$ de la matrice (avec $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$) **[1.5 points]**

$$A = \begin{pmatrix} a & b+\alpha \\ -b+\alpha & a \end{pmatrix}$$