2015/16

Analyse Numérique (LM64)

Partiel (8 mars 2016)

Temps: 2 heures

1. Soient la matrice A et le vecteur b donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

écrire la décomposition LU de A et résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de "descente et remontée" ($Ly = b$, $Ux = y$).

2. On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & -b & -b & -b \\ a & -b & c & c \\ a & -b & c & -d \end{pmatrix} ,$$

où a, b, c et d sont des nombres réels.

   i) Donner la décomposition LU de A et les conditions sur a, b, c et d pour que la matrice A soit inversible.

   ii) Donner les conditions nécessaires et sufissantes sur a, b, c et d pour que A admette une décomposition de Choleski.

   iii) Écrire la décomposition de Choleski d'une matrice A qui satisfait les conditions dans ii). (*Suggestion: écrire $A = LDL^t$, avec D une matrice diagonale et définir de façon appropriée une matrice $\tilde{L}$ à partir de L et D de telle manière que $A = \tilde{L}\tilde{L}^t$*).

3. Montrer que pour L_1, L_2 matrices triangulaires inférieures, les matrices $L_1^{-1}, L_2^{-1}, L_1 \cdot L_2$ sont triangulaires inférieures. Justifier que des propriétés analogues sont satisfaites pour des matrices triangulaires supérieures.

4. Décomposition LU et unicité.

   i) Énoncer (sans donner la preuve) une condition nécessaire et sufissante pour qu'une matrice A admette une unique décomposition LU **sans permutation**, c.à.d. $A = LU$.

   ii) Étant donnée une matrice A inversible et admettant l'existence d'une matrice de permutation P telle que $PA = LU$, montrer que cette décomposition LU de PA est unique.

   iii) Donner un exemple de matrice A admettant deux décompositions LU différentes (écrire explicitement les deux décompositions $A = L_1U_1 = L_2U_2$).