2016/17

Analyse Numérique (LM64)

Contrôle Partiel (16 mars 2017)

Temps : 2h00

1. (Décomposition LU du Laplacien) [**5 points**]

   Étant données les matrices (symétriques définies positives) :

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

   i) Donner la décomposition LU de chaque matrice Δ_2, Δ_3 et Δ_4. [**2 points**]

   ii) Proposer la forme des matrices L_n et U_n de la décomposition LU de la matrice Δ_n :

$$(\Delta_n)_{ij} = \begin{cases} 2 & , \ i = j \\ -1 & , \ |i-j| = 1 \\ 0 & , \ |i-j| > 1 \end{cases}$$

   [**1 point**]

   iii) Démontrer, pour tout n entier naturel, que l'on a bien la décomposition $\Delta_n = L_n U_n$ proposée. Est-elle unique ? Justifier votre réponse. [**2 points**]

2. (Décomposition de Choleski et conservation du profil) [**7 points**]

   i) Énoncer le théorème de la décomposition de Choleski, $A = \tilde{L}\tilde{L}^t$. [**1 point**]

   ii) Expliciter l'algorithme de décomposition de Choleski (notamment la preuve d'unicité, en assumant montrée l'existence de la décomposition). [**2 points**]

   iii) Utiliser l'algorithme du point ii) pour donner (si c'est en effet possible) la décomposition de Choleski de la matrice Δ_4 de la Question 1. [**1 point**]

   iv) Vérifier le résultat en utilisant la décomposition LU de Δ_4 du point 1.i). [**1 point**]

   v) Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ (inversible) on définit pour chaque ligne $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'entier j_i :

$$j_i = \min \{j \in \{1, \ldots\ n\} \ , \ \text{avec } (A)_{ij} \neq 0\} \ .$$

   L'ensemble des nombres j_i définit le profil de A. Montrer que la décomposition de Choleski préserve le profil, c'est à dire : le profil de $\tilde{L}$ est le même que celui de A (où A satisfait les conditions du théorème de décomposition de Choleski).
   [*Suggestion* : utiliser l'algorithme explicité dans le point ii)]. [**2 points**]

3. (Normes matricielles induites et rayon spectral) [**8 points**]

   Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$ (comme espaces linéaires sur $\mathbb{C}$) :

   i) Définir la norme matricielle induite $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{R})$ (sur le corps $\mathbb{C}$). [**1 point**]

   ii) Définir le rayon spectral $\rho(A)$ de A. [**1 point**]

   iii) Pour la norme du point i), montrer (noter que cette norme est prise sur $\mathbb{C}$)

$$\rho(A) \leq ||A|| \ .$$

   [**2 points**]

   iv) Donner un example de norme $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{R})$ et de matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\rho(A) > ||A||$. Est-elle cette norme une norme matricielle ? Justifier. [**1 point**]

   v) Si A est symétrique, prouver (à partir de la définition de la norme $||\cdot||_2$)

$$\rho(A) = ||A||_2 \ ,$$

   où $||\cdot||_2$ est la norme matricielle induite en $M_n(\mathbb{R})$ à partir de la norme euclidienne en $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire $||\boldsymbol{x}||_2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$). [**3 points**]