L3 Analyse Numérique (2017/18)
Contrôle Partiel (8 novembre 2017)

Temps : 2h00

1. (Décomposition LU) **[6 points]**

   Étant données les matrices :

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} ,$$

   i) Donner la décomposition LU de chaque matrice Δ_2, Δ_3 et Δ_4. **[2 points]**
   ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour garantir l'unicité de la décomposition LU (sans permutation) de Δ_4. **[2 points]**
   iii) Énoncer la notion de matrice définie positive. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles Δ_2, Δ_3 et Δ_4 sont définies positives. **[2 points]**

2. (Décomposition de Choleski et conservation du profil) **[6 points]**

   i) Énoncer le théorème de la décomposition de Choleski.**[1 point]**
   ii) Utiliser l'algorithme de Choleski pour donner la décomposition de Choleski de Δ_4 dans la Question 1 (pour les valeurs de a pour lesquelles c'est possible). **[2 points]**
   iii) Vérifier le résultat en utilisant la décomposition LU de Δ_4 du point 1.i). **[1 point]**
   iv) Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ (inversible) on définit pour chaque ligne $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'entier j_i :

$$j_i = \min \{ j \in \{1, \ldots \ n\} \ , \ \text{avec } (A)_{ij} \neq 0 \} \ .$$

   L'ensemble des nombres j_i définit le profil de A. Montrer que la décomposition de Choleski préserve le profil, c'est à dire : le profil de $\tilde{L}$ est le même que celui de A (où A satisfait les conditions du théorème de décomposition de Choleski).
   [*Suggestion* : utiliser l'algorithme de Choleski]. **[2 points]**

3. (Normes matricielles et conditionnement) **[8 points]**

   Étant données $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme $|| \cdot ||$ sur $\mathbb{R}^n$:
   i) Définir la norme matricielle induite $|| \cdot ||$ sur $M_n(\mathbb{R})$. **[1 point]**
   ii) Définir le rayon spectral $\rho(A)$ de A. **[1 point]**
   iii) Étant données $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme matricielle $|| \cdot ||$, avec $||A||$ finie, on définit

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \ .$$

   Montrer $||e^A|| < \infty$. **[1 point]**
   [*Suggestion* : utiliser le fait que la série de Taylor de e^x converge $\forall x \in \mathbb{R}$.]
   iv) Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, c'est à dire $A^t = -A$:
      a) Montrer $||e^A||_2 = 1$, avec $|| \cdot ||_2$ associée à la norme euclidienne. **[1 point]**
      [*Suggestion* : utiliser $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.]
      b) Quelle est la valeur de $\mathrm{cond}_F(e^A)$, avec $|| \cdot ||_F$ la norme de Frobenius ? **[1 point]**
      c) Quelle est la valeur de $\rho(e^A)$? **[1 point]**
      [*Suggestion* : montrer que A est diagonalisable avec valeurs propres imaginaires.]
   v) On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et b et $\delta_b \in \mathbb{R}^n$, avec $b \neq 0$. Si x et $\delta_x \in \mathbb{R}^n$ sont, respectivement, solutions de

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A(x + \delta_x) &= b + \delta_b \ , \end{aligned}$$

montrer

$$\frac{||\delta_x||}{||x||} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{||\delta_b||}{||b||}$$

[**2 points**]