2015/16

Analyse Numérique (LM64)

Session 2 (21 juin 2016)

Temps: 3 heures

1. On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & -c & -c \\ a & b & -c & -d \end{pmatrix},$$

où a, b, c et d sont des nombres réels.

   i) **[3 points]** Donner la décomposition LU de A et les conditions sur a, b, c et d pour que la matrice A soit inversible.

   ii) **[1 points]** Donner les conditions nécessaires et sufissantes sur a, b, c et d pour que A admette une décomposition de Choleski.

   iii) **[2 points]** Écrire la décomposition de Choleski de la matrice A, quand elle satisfait les conditions dans ii).

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que:

   i) **[2 points]** A est symétrique définie positive si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$.

   ii) **[2 points]** La méthode de Jacobi converge si et seulement si $-1/2 < a < 1/2$.

3. Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles. Soit la suite définie par

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x_0 \\ x^{(k+1)} &= Bx^{(k)} + c \end{aligned}$$

avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$.

   i) **[1 point]** Énoncer la condition nécéssaire et suffisante, en termes de $\rho(B)$, pour la convergence $x^{(k)} \to A^{-1}b$.

   ii) Donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   ii.a) **[3 points]** Écrire la matrice B_{R} pour la méthode de Richardson et déterminer le rayon spectral $\rho(B_{\mathrm{R}})$.

   ii.b) **[3 points]** Écrire la matrice $B_{\mathrm{G-S}}$ pour la méthode de Gauss-Seidel et déterminer le rayon spectral $\rho(B_{\mathrm{G-S}})$.

   ii.c) **[1 point]** Pour quelle méthode la convergence est la plus rapide?

4. **[2 points]** Soit A une matrice symétrique admettant une décomposition LU sans permutation, c.à.d. qu'on suppose qu'il existe L triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1, et U triangulaire supérieure telle que $A = LU$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si tous les pivots (c.à.d. les coefficients diagonaux de la matrice U) sont strictement positifs.