
Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques
Licence Sciences L3 Mathématiques, semestre 2, année 2016/2017.

Analyse Numérique (LM64), seconde session, 21 Juin (durée : 3h).
Les documents, les calculatrices et tout autre objet électronique ne sont pas autorisés.
Les quatre exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

exercice 1

Résoudre par la méthode de Cholesky le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x - 6y + 8z + 2t & = & 12 \\ -6x + 10y - 15z - 3t & = & -21 \\ 8x - 15y + 26z - t & = & 34 \\ 2x - 3y - z + 62t & = & 1 \end{array}\right. \tag{1}$$

Ce qui signifie que l'on calculera d'abord la décomposition de Cholesky de la matrice associée au système.

exercice 2

1. On considère sur $I\!R^n$ la norme $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)^T$). Montrer que la norme matricielle associée à cette norme est :

$$\|A\|_\infty \equiv \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{2}$$

   où $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est une matrice $n \times n$ réelle.

2. Supposons que A soit une matrice à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire que pour tout i ($1 \le i \le n$), $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}|$.
   (a) Montrer que la matrice A est inversible. On pourra, partant de $Ax = 0$, se placer sur une ligne d'indice k tel que $|x_k| = \|x\|_\infty$.
   (b) On considère le système $Ax = b$, b étant un vecteur colonne de $I\!R^n$. Rappeler ce qu'est la méthode de Jacobi appliquée à ce système. Montrer que cette méthode converge. On majorera la norme infinie de la matrice d'itération associée.

exercice 3

Soit A une matrice carrée réelle $n \times n$ symétrique définie positive, on sait que la résolution du système $Ax = b$ équivaut à la recherche du minimum de la fonction $J(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$. On peut donc appliquer à cette question des techniques d'optimisation comme par exemple la méthode de gradient de plus profonde descente.

On a ainsi l'algorithme suivant :

initialisation : $x^{(0)} \in I\!R^n$, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ (résidu opposé au gradient)

étape k :

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}} > 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A r^{(k)} (= b - A x^{(k+1)}).$$

1. Expliquer comment cette algorithme a été construit. On évoquera bien entendu la notion de gradient.
2. Soit la fonctionnelle $J(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$. Calculer les premiers itérés de l'algorithme en partant de $x^{(0)} = (1,4)^T$.

exercice 4

Soit B une matrice complexe carrée $n \times n$ telle que $\|B\| < 1$ pour une certaine norme matricielle.

1. Donner une majoration de son rayon spectral $\rho(B)$.
2. En déduire que $I - B$ est inversible, I désignant la matrice identité $n \times n$.
3. Montrer que :
$$(I - B)^{-1} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} B^i. \tag{3}$$
On pose alors $(I-B)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} B^i$. On remarquera que $(I-B)(I+B+\cdots+B^k) = I - B^{k+1}$.
4. Majorer $\|(I - B)^{-1}\|$.
5. Soit C une matrice carrée réelle $n \times n$ dont tous les coefficients sont positifs. Soit α un réel tel que $\rho(C) < \alpha$.
   (a) Vérifier que la matrice $\alpha I - C$ est inversible.
   (b) Donner l'expression de $(\alpha I - C)^{-1}$ sous la forme d'une série et en déduire que tous les coefficients de $(\alpha I - C)^{-1}$ sont positifs.