L3 Analyse Numérique (2017/18)
Session 2 (20 juin 2018)

Temps : 3h00

1. (Normes matricielles et conditionnement) [**7 points**]

   Étant données $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$:

   i) Définir la norme matricielle induite $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{R})$. [**1 point**]

   ii) Définir le rayon spectral $\rho(A)$ de A. [**1 point**]

   iii) Étant données $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme matricielle $||\cdot||$, avec $||A||$ finie, on définit

   $$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n .$$

   Montrer $||e^A|| < \infty$. [**1 point**]

   [*Suggestion* : utiliser le fait que la série de Taylor de e^x converge $\forall x \in \mathbb{R}$.]

   iv) Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, c'est à dire $A^t = -A$:

   a) Montrer $||e^A||_2 = 1$, avec $||\cdot||_2$ associée à la norme euclidienne. [**1 point**]

   [*Suggestion* : utiliser $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.]

   b) Quelle est la valeur de $\mathrm{cond}_F(e^A)$, avec $||\cdot||_F$ la norme de Frobenius ? [**0.5 point**]

   c) Quelle est la valeur de $\rho(e^A)$? [**0.5 point**]

   [*Suggestion* : montrer que A est diagonalisable avec valeurs propres imaginaires.]

   v) On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et b et $\delta_b \in \mathbb{R}^n$, avec $b \neq 0$. Si x et $\delta_x \in \mathbb{R}^n$ sont, respectivement, solutions de

   $$\begin{aligned} &Ax = b \\ &A(x + \delta_x) = b + \delta_b \ , \end{aligned}$$

   montrer

   $$\frac{||\delta_x||}{||x||} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{||\delta_b||}{||b||}$$

   [**2 points**]

2. (Valeurs propres) [**6 points**]

   i) Énoncer et montrer le théorème des cercles de Gershgorine. [**3 points**]

   ii) Étant donnée la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & 3 & \gamma & \delta & \alpha \\ \gamma & \delta & 7 & \alpha & \beta \\ \delta & \alpha & \beta & 9 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 10 \end{pmatrix} ,$$

   formuler une condition suffisante sur α, β, γ et δ garantissant que les valeurs propres de A sont toutes distinctes. [**2 points**]

   iii) Formuler une condition suffisante sur α, β, γ et δ garantissant que la matrice A est symétrique définie positive. [**1 point**]

3. (Méthodes itératives) [**7 points**]

   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles. Soit la suite définie par

   $$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$.

i) Énoncer la condition nécessaire et suffisante, en termes du rayon spectral $\rho(B)$, pour la convergence $x^{(k)} \to A^{-1}b$. **[1 point]**

ii) On considère la matrice, avec $a \in \mathbb{R}$ arbitraire

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} .$$

a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson [**3 point**], Jacobi [**1.5 point**] et Gauss-Seidel [**1 point**].

b) Dans l'ensemble de valeurs de a pour lesquelles les trois méthodes convergent, quel est le classement de ces méthodes en fonction de leur vitesse de convergence respective ? [**0.5 points**]