L3 Analyse Numérique (2019/20)
Session 2 (6 juillet 2020, 14h00)

Temps : 3h00

Chaque étudiant s'engage de façon signée, en participant à ce contrôle, à respecter les règles en vigueur à l'Université de Bourgogne, notamment à répondre sans aucune aide aux questions posées.

SIGNATURE OBLIGATOIRE :

1. (Décomposition des matrices) **[5 points]**
   Étant donnée la matrice :
$$\Delta = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix},$$
   i) Utiliser l'algorithme de Choleski pour donner la décomposition de Choleski de Δ (pour les valeurs de a pour lesquelles ça soit possible). **[2 points]**
   ii) Vérifier le résultat en utilisant la décomposition LU de Δ. **[1 point]**
   iii) Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ (inversible) on définit pour chaque ligne $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'entier j_i :
$$j_i = \min \{ j \in \{1, \ldots\ n\} \text{ , avec } (A)_{ij} \neq 0 \} \ .$$
   L'ensemble des nombres j_i définit le profil de A. Montrer que la décomposition de Choleski préserve le profil, c'est à dire : le profil de $\tilde{L}$ est le même que celui de A (où A satisfait les conditions du théorème de décomposition de Choleski). **[2 points]**

2. (Normes matricielles et conditionnement) **[7 points]**
   i) On considère $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire (hermitien) $\langle u, v\rangle = u^* v$, où $u^* = \bar{u}^t$, avec la norme $||u||_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Montrer que la norme induite en $M_n(\mathbb{C})$ est caractérisée par $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$. **[1 point]**
   ii) Montrer que pour une matrice normale $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversible on a
$$||A^{-1}||_2 = \frac{1}{|\lambda_1|} \ ,$$
   où les valeurs propres de A satisfont $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$. **[1 point]**
   iii) Étant donnée la matrice (avec $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$)
$$A = \begin{pmatrix} a & b+\alpha \\ -b+\alpha & a \end{pmatrix}$$
   calculer les normes $||A||_1, ||A||_\infty$, $||A||_2$ et $||A||_F$ (Frobenius). **[2 points]**
   iv) Montrer : i) $\mathrm{cond}(A) \geq 1$, ii) $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$ et iii) $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$, pour Q orthogonal. **[1 point]**
   v) Déterminer la valeur de α qui optimise le conditionnement $\mathrm{cond}_2(A)$ de la matrice (avec $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, pas nécessairement $a^2 + b^2 = 1$) **[2 points]**
$$A = \begin{pmatrix} a & b+\alpha \\ -b+\alpha & a \end{pmatrix}$$

3. (Stabilité valeurs propres) [**5 points**]
Si on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

et la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} ,$$

trouver une borne supérieure pour ε garantissant que les valeurs propres de $A(\varepsilon) = A + \varepsilon C$ ne s'annulent pas.

4. (Systèmes non-linéaires) [**3 points**]
   i) Étant donné $a \in \mathbb{R}$ fixe, écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système [**1 point**] :

$$\begin{cases} r\cos\theta = a \\ r\sin\theta = 0 \end{cases}$$

   ii) Discuter la convergence de l'algorithme si $a = 1$ et si $a = 0$. [**1 point**]
   iii) Choisir une valeur initielle et implementer les deux premiers pas de l'algorithme, pour a arbitraire. [**1 point**]