2020/21
Analyse Numérique, L3
TD1

1. (*Rappel : pivot de Gauss*). Résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

par la méthode du pivot de Gauss.

2. (*Matrices triangulaires*). Étant données les matrices triangulaires inférieures L_1 et L_2, et les matrices triangulaires supérieures U_1 et U_2, montrer :
   i) L_1L_2 est triangulaire inférieure et (si inversibles) L_1^{-1} et L_2^{-1} sont aussi triangulaires inférieures.
   ii) Le résultat analogue pour U_1 et U_2.
   iii) Si L_1 et L_2 ont tous les éléments dans la diagonale principale égaux à 1, montrer que L_1L_2, L_1^{-1}, L_2^{-1} ont aussi tous les éléments dans la diagonale principale égaux à 1.

3. (*Rappel : procédé de Gram-Schmidt*). Soit $P_2([0,1])$ l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Le produit scalaire de deux polynômes $p(t),\ q(t) \in P_2([0,1])$ est défini par

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

   i) Soit $B = \{e_0(t) = 1, e_1(t) = t, e_2(t) = t^2\}$. Montrer que B est une base de $P_2([0,1])$. Est-ce que c'est une base orthonormée ?
   ii) Calculer une base orthonormée $B' = \{e'_0(t), e'_1(t), e'_2(t)\}$ en applicant la méthode de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} e'_0(t) &= \frac{e_0(t)}{||e_0||} \\ u_1(t) &= e_1(t) - \langle e_1, e'_0 \rangle e'_0(t), \quad e'_1(t) = \frac{u_1(t)}{||u_1||} \\ u_2(t) &= e_2(t) - \langle e_2, e'_0 \rangle e'_0(t) - \langle e_2, e'_1 \rangle e'_1(t), \quad e'_2(t) = \frac{u_2(t)}{||u_2||} \end{aligned}$$

   iii) Montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : P_2([0,1]) &\to P_2([0,1]) \\ p(t) &\mapsto \frac{d}{dt}\,(tp(t)) \end{aligned}$$

   est un opérateur linéaire. Construire les matrices de cet opérateur dans les bases B et B'

$$M(\mathcal{A}, B, B)\ ,\ M(\mathcal{A}, B, B')\ ,\ M(\mathcal{A}, B', B').$$

4. *(Factorisation unitaire d'une matrice ; théorème de Schur)*. Toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire

$$A = UTU^* \ ,$$

avec U une matrice unitaire $U^{-1} = U^*$ et T une matrice triangulaire supérieure.

5. (*Matrices normales et diagonalisation*). Une matrice A est normale (i.e. $AA^* = A^*A$) si et seulement s'il existe U une matrice unitaire telle que

$$A = UDU^* \ ,$$

avec D la matrice diagonale formée par des valeurs propres.

6. (*Commutation et diagonalisation*). Soient A et $B \in M_n(\mathbb{K})$. On définit le commutateur

$$[A, B] = AB - BA \ .$$

i) Montrer que si A et B sont hermitiennes, alors elles possèdent une base commune de vecteurs propres si et seulement si $[A, B] = 0$.
ii) Appliquer à :

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} .$$

7. (*Expression d'une matrice symétrique*). Soit A une matrice symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dont les vecteurs propres correspondants $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ forment une famille orthonormale. Montrer que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^t .$$

8. (*Matrice non diagonalisable*). Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} ,$$

montrer que A n'est pas diagonalisable.