2020/21

Analyse Numérique, L3

TD2

1. (*Décomposition LU*). Trouver la décomposition LU de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (*Décomposition LU du Laplacien*). Étant données les matrices (symétriques définies positives) :

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   i) Donner la décomposition LU de chaque matrice Δ_2, Δ_3 et Δ_4.
   ii) Proposer la forme des matrices L_n et U_n de la décomposition LU de la matrice Δ_n :

$$(\Delta_n)_{ij} = \begin{cases} 2 & , \ i = j \\ -1 & , \ |i-j| = 1 \\ 0 & , \ |i-j| > 1 \end{cases}$$

   iii) Démontrer, pour tout n entier naturel, que l'on a bien la décomposition $\Delta_n = L_n U_n$ proposée. Est-elle unique ?

3. (*Décomposition LU de la matrice principale d'ordre k*). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. On appelle matrice principale d'ordre k de A la matrice $A_k \in M_k(\mathbb{R})$ définie par $(A_k)_{ij} = a_{ij}$ pour $i = \{1, \dots, k\}$ et $j = \{1, \dots, k\}$. On suppose qu'il existe une matrice $L_k \in M_k(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et une matrice triangulaire supérieure $U_k \in M_k(\mathbb{R})$ inversible, telles que $A_k = L_k U_k$. Montrer que :
   a) On peut écrire A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} L_k & 0_{k\times(n-k)} \\ C_k & I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & B_k \\ 0_{(n-k)\times k} & D_k \end{pmatrix} \quad ,$$

   où $B_k \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$, $C_k \in M_{n-k;k}(\mathbb{R})$ et $D_k \in M_{n-k;n-k}(\mathbb{R})$.
   b) En particulier, la matrice principale d'ordre $k+1$ s'écrit sous la forme

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} L_k & 0_{1\times k} \\ c_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & b_k \\ 0_{k\times 1} & d_k \end{pmatrix} \quad ,$$

   où $(b_k) \in M_{k,1}(\mathbb{R})$ est la première colonne de la matrice B_k , $(c_k) \in M_{,k}(\mathbb{R})$ est la première ligne de la matrice C_k, et d_k est le coefficient de la ligne 1 et colonne 1 de D_k.

4. (*LU sans permutation*). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On définit le mineur principal d'ordre k comme le déterminant de la matrice principale d'ordre k de A. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) Il existe un unique couple (L, U), avec L matrice triangulaire inférieure avec diagonale principale de coefficients égaux à 1 et U une matrice inversible triangulaire supérieure, tel que $A = LU$.
   ii) Les mineurs principaux de A sont tous non nuls.

5. (*Décomposition LU et matrices non-inversibles*). Étant donnée A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

   trouver deux matrices L_1 et L_2 distinctes, toutes deux triangulaires inférieures et dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, et deux matrices U_1 et U_2 triangulaires supérieures avec $A = L_1U_1 = L_2U_2$.

6. (*Caracterisation LU des matrices symétriques définies positives*). Soit A une matrice symétrique admettant une décomposition LU sans permutation, c.à.d. qu'on suppose qu'il existe L triangulaire inférieure de coefficients diagonaux tous égaux à 1, et U triangulaire supérieure telle que $A = LU$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si tous les pivots (c.à.d. les coefficients diagonaux de la matrice U) sont strictement positifs.

7. (*Décomposition LU et Choleski*). On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} ,$$

   où a, b, c et d sont des nombres réels.
   i) Donner la décomposition LU de A et les conditions sur a, b, c et d pour que la matrice A soit inversible.
   ii) Donner les conditions nécessaires et sufissantes sur a, b, c et d pour que A admette une décomposition de Choleski.
   iii) Écrire la décomposition de Choleski de la matrice A satisfaisant les conditions dans ii).

8. (*Coût de Choleski*). Montrer que la méthode de Choleski demande $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ opérations.