2020/21

Analyse Numérique, L3

TD3

1. (*Caractérisation de normes induites*). Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer :
   i) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||\cdot||_\infty$ et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante ; notée aussi $||\cdot||_\infty$. Alors
$$||A||_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
   ii) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||\cdot||_1$ et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante ; notée aussi $||\cdot||_1$. Alors
$$||A||_1 = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
   iii) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||\cdot||_2$ et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante ; notée aussi $||\cdot||_2$. Alors
$$||A||_2 = \left(\rho(A^t A)\right)^{\frac{1}{2}}$$
   En particulier ; si A est symétrique, $||A||_2 = \rho(A)$.
   [Rappel : $||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$; pour $p \geq 1$, $||\boldsymbol{x}||_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$].

2. (*Norme de Frobenius*). Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ on définie $||A||_F$ par :
$$||A||_F = \left(\mathrm{Tr}(A^t A)\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$
   Montrer :
   i) $||\cdot||_F$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (norme de Frobenius).
   ii) La norme de Frobenius est une norme matricielle.
   iii) La norme de Frobenius n'est pas une norme matricielle induite.

3. (*Calcul de normes matricielles*). Étant donnée la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
   calculer $||A||_\infty$, $||A||_1$, $||A||_2$ et $||A||_F$.

4. (*Approximation du rayon spectral par une norme induite*).
   i) Soit $||\cdot||$ une norme induite. Montrer que $\rho(A) \leq ||A||$, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   ii) Soient maintenant $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$, montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}^n$ (qui dépend de A et ϵ) telle que la norme induite sur $M_n(\mathbb{R})$, notée $||\cdot||_{A,\epsilon}$, vérifie $||A||_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon$.

5. (*Convergence et norme des matrices*). Écrire une matrice A et une norme $||\cdot||$ telles que A^k ne converge pas vers zéro quand $k \to \infty$ et $||A|| < 1$. Est-ce qu'on peut trouver une matrice A et une norme $||\cdot||$ matricielle qui satisfont ces propriétés ?

6. (*Propriétés du conditionnement associé à la norme euclidienne*). On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne usuelle $||\cdot||_2$ et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme induite (notée aussi $||\cdot||_2$). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible. On note alors $\mathrm{cond}_2(A)$ le conditionnement de A.
   i) On indroduit les *valeurs singuliers* σ_i de A comme les racines carrées des valeurs propres de A^tA, ordonnés $0 \leq \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_n$ (noter $\sigma_n = \sqrt{\rho(A^tA)}$). Montrer
   $$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\sigma_n}{\sigma_1} .$$
   En particulier, si A est normale (et inversible), avec valeurs propres $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$
   $$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|} .$$
   ii) Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = 1$ si et seulement si $A = aQ$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et Q est une matrice orthogonale (c'est-à-dire $Q^t = Q^{-1}$).
   iii) On suppose que $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(R)$.
   iv) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques définies positives. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A+B) \leq \max\{\mathrm{cond}_2(A), \mathrm{cond}_2(B)\}$.

7. (*Matrices mal conditionnées*). On considère le problème $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec matrice A ($a \neq 0$)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} .$$
   i) Calculer $\mathrm{cond}_2(A)$.
   (*Indication :* utiliser le point i) de l'exercice précédent, en notant que A est symétrique).
   ii) Évaluer $\lim_{a\to 0} (\mathrm{cond}_2(A))$.
   iii) Si on considère A et $\boldsymbol{b}$ donnés par
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-10^{-16} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20-10^{-15} \end{pmatrix} ,$$
   déterminer $\boldsymbol{x}$.
   iv) Comparer avec la solution $\boldsymbol{x}'$ du problème $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, où A a été legèrement perturbée :
   $$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+10^{-16} \end{pmatrix} .$$

8. (*Conditionnement du Laplacien discret en dimension* 1). Soit $f \in C([0,1])$. Soit $n \in N^*$, n impair. On pose $h = \frac{1}{n+1}$. Soit Δ_n la matrice définie par
   $$\begin{array}{rcll} (\Delta_n)_{ii} & = & \frac{2}{h^2} & , \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \\ (\Delta_n)_{ij} & = & -\frac{1}{h^2} & , \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ j = i \pm 1, \\ (\Delta_n)_{ij} & = & 0 & , \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ |i-j| > 1. \end{array}$$
   Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ_n. Calculer $\mathrm{cond}_2(\Delta_n)$ et montrer :
   $$h^2\mathrm{cond}_2(\Delta_n) \to \frac{4}{\pi^2}, \quad \text{lorsque } h \to 0 .$$