Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Exercices à rédiger pour le 1 Avril 2017.
L'exercice 4 est facultatif.
Eléments de correction

exercice 1
Effectuer la décomposition de Cholesky (par l'algorithme) de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 10 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

réponse 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 10 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{14} \end{pmatrix}$$

exercice 2

1. Soit la matrice complexe :
$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$
Dessiner les cercles de Gerschgorin [2] associés à A et localiser les valeurs propres de A.
Que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice carrée et de celles de sa transposée ? Dessiner les cercles Gerschgorin associés à A^T.
Donner pour conclure une majoration du spectre de A.
réponse 2 Les disques de Gershgorin sont donnés par : $|z-1-i| \leq 3$, $|z-2-i| \leq 4$ et $|z-6| \leq 2$.
Si λ est une valeur de propre de A, elle se trouve dans un disque et on a donc :
$$|\lambda| - |a_{kk}| \leq |\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$
d'où $|\lambda| \leq \sum_j |a_{kj}|$ (on retrouve un résultat connu). Ici $\rho(A) \leq 8$.

1. Licence Sciences L3, Analyse Numérique, U-Bourgogne 2016-2017
2. Semyon Aranovich Gershgorin, 24 August 1901 in Pruzhany, Belarus - 30 May 1933 in Leningrad, now St Petersburg, Russia.

2. Les disques de Gershgorin associés à une matrice carrée complexe contiennent-ils tous au moins une valeur propre ? (preuve ou contre-exemple en dimension 2)

   réponse 3 Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ de valeurs propres sont i et $-i$. Les disques de Gershgorin sont donnés par : $|z-1| \leq 1$ et $|z+1| \leq 2$. Le premier contient ni i ni $-i$.

3. Donner plusieurs exemples de matrices carrées 3×3 dont les disques (fermés) de Gerschgorin sont disjoints 2 à 2. Quelle remarque (ou quelle conjecture) peut-on faire ? Pourriez-vous alors prouver cette conjecture ? (difficile !)

   réponse 4 On observe alors que chacun des disques contient une et une seule valeur propre. Il existe un résultat d'Analyse Complexe que l'on nomme « Continuité des zéros d'un polynôme »(ce résultat est une conséque du célèbre théorème de Rouché). Si $p(z,\lambda) = a_n(\lambda)z^n + \cdots + a_1(\lambda)z + a_0(\lambda)$ un polynôme à coefficients complexes dépendant continûment du paramètre λ. Si c est une racine de $p(z,\lambda_0)$ de multiplicité m, alors pour $\epsilon > 0$ et $|\lambda - \lambda_0|$ suffisamment petits, le polynôme $p(z,\lambda)$ a m racines dans le disque ce centre c et et de rayon ϵ. Ainsi si on considère des matrices carrées complexes, on peut appliquer ce qui précède aux polynômes caractéristiques. En dimension 3, comme on sait exprimer les racines d'un polynôme de degré 3 à l'aide des coefficients (formules de Cardan), on peut se dispenser de ce résultat.

   Ceci étant, les coefficients diagonaux de A sont distincts deux à deux. Considérons $A(\theta)$ la matrice obtenue à partir de A en multipliant les coefficients en dehors de la diagonale par $\theta \in [0,1]$. Les disques de Gershgorin de $A(\theta)$ sont centrés sur les coefficients diagonaux de A, sont disjoints deux à deux, et les rayons sont inférieurs à ceux de $A(1) = A$ (pour un même centre). La matrice diagonale $A(0)$ a trois valeurs propres distinctes. Partant d'une de ces valeurs et en faisant varier θ de 0 à 1, on arrive par un « chemin continu »(de valeurs propres) à une valeur propre de $A = A(1)$ tout en restant dans le disque de Gershgorin.

exercice 3

Dans un ouvrage d'Analyse Numérique, on trouve l'énoncé suivant :

> *Soit A une matrice complexe $n \times n$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et de vecteurs propres $v_1, \ldots, v_n$ (normalisés par $\|v_i\|_2 = 1$).*
>
> *Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, les vecteurs y_k de l'itération $y_{k+1} = Ay_k$ vérifient*
>
> $$y_k = \lambda_1^k \left(a_1 v_1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right) \right)$$
>
> *le nombre a_1 étant défini par $y_0 = \sum_i^n a_i v_i$.*
>
> *Le quotient de Rayleigh[3] satisfait (si $a_1 \neq 0$) :*
>
> $$\frac{y_k^H A y_k}{y_k^H y_k} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right).$$

3. John William Strutt, troisième baron Rayleigh, plus connu sous son titre lord Rayleigh (12 novembre 1842 à Landford Grove, Essex, Angleterre - 30 juin 1919 à Witham, Essex, Angleterre) était un physicien anglais. Il est lauréat du prix Nobel de physique de 1904.

1. Démontrer le résultat ci-dessus.

   réponse 5 Partant de $y_0 = \sum_i a_i v_i$, on obtient

$$y_k = A^k y_0 = \sum_i a_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k \left(a_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i \right)$$

   soit la première égalité de l'énoncé.
   On a :

$$y_k^H A y_k = y_k^H y_{k+1} = \sum_i |a_i|^2 |\lambda_i|^{2k} \lambda_i + \sum_{i \neq j} \overline{a_i} a_j \overline{\lambda_i}^k \lambda_j^{k+1} v_i^H v_j$$

   et

$$y_k^H y_k = \sum_i |a_i|^2 |\lambda_i|^{2k} + \sum_{i \neq j} \overline{a_i} a_j \overline{\lambda_i}^k \lambda_j^k v_i^H v_j$$

   Si $a_1 \neq 0$, on a alors :

$$y_k^H A y_k = |a_1|^2 |\lambda_1|^{2k} \lambda_1 \left(1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|^2 |\lambda_i|^{2k} \lambda_i}{|a_1|^2 |\lambda_1|^{2k} \lambda_1} + \sum_{i \neq j} \frac{\overline{a_i} a_j \overline{\lambda_i}^k \lambda_j^{k+1} v_i^H v_j}{|a_1|^2 |\lambda_1|^{2k} \lambda_1} \right).$$

   Dans la première somme qui se trouve dans la parenthèse, le terme général est un $\mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k+1}\right)$. Par contre dans la seconde somme, les termes les plus grands en module sont obtenus quand $i = 1$ et ce sont des $\mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k}\right)$.

2. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Donner les expressions exactes des valeurs propres de A. En partant de $y_0 = (1,1,1)^T$, calculer à l'aide de l'algorithme proposé une approximation de la plus grande valeur propre en module de A.

   réponse 6 La valeur propre la plus grande en module est $2(1 + \cos\frac{\pi}{4}) = 3,41421356\ldots$.
   On a $y_0 = (1,1,1)^T$, $y_1 = (3,4,3)^T$ et $y_2 = (10,14,10)^T$, d'où :

$$\frac{y_1^H A y_1}{y_1^H y_1} = \frac{116}{34} = 3,41476\ldots$$

exercice 4
Soit A une matrice réelle inversible $n \times n$. On considère la suite (A_k) définie par la relation de récurrence :

$$A_{k+1} = A_k (I + E_k) \tag{1}$$

où $E_k = I - AA_k$, la matrice A_0 étant donnée.

1. Montrer que pour tout $k \geq 0$,
$$E_k = E_0^{2^k}.$$
réponse 7 On a $E_{k+1} = I - AA_{k+1} = I - AA_k(I + E_k) = I - AA_k - AA_kE_k = (I - AA_k)E_k = E_k^2$. On en tire que $E_k = E_0^{2^k}$.

2. (a) Prouver que la suite converge vers A^{-1} si et seulement si $\rho(E_0) < 1$.

   réponse 8 Comme l'application $B \mapsto AB$ est un homéomorphisme, $A_k \to A^{-1}$ si et seulement si $AA_k \to I$. Ceci équivaut à $E_k \to 0$, soit $E_0^{2k} \to 0$.

   Si $\rho(E_0) < 1$, $E_0^p \to 0$, à fortiori $E_0^{2k} \to 0$. Réciproquement si $E_0^{2k} \to 0$, on ne peut avoir $rho(E_0) \geq 1$ (il suffit de raisonner avec un vecteur propre de E_0).

   (b) Donner alors une majoration de $\|A_k - A^{-1}\|$ ($\|.\|$ désignant une norme matricielle subordonnée).

   réponse 9 Ona $A^{-1} - A_k = A^{-1}(I - AA_k) = A^{-1}E_k$, d'où :
$$\|A^{-1} - A_k\| \leq \|A^{-1}\|\|E_0\|^{2^k}.$$

   (c) Vérifier que le choix de $A_0 = \frac{1}{\|A\|\|A^T\|}A^T$ assure la convergence de la suite (A_k).

   réponse 10 La matrice $AA_0 = \frac{1}{\|A\|\|A^T\|}AA^T$ est symétrique définie positive. On remarque de plus que $\rho(AA_0) \leq \frac{1}{\|A\|\|A^T\|}\|AA^T\| \leq 1$. Les valeurs propres de AA_0 sont dans $]0,1]$ donc celles de E_0 sont dans $[0,1[$.