Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

TD3 (Analyse numérique matricielle)

exercice 1 (Factorisation LU)
On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la décomposition LU de B (d'ailleurs, pourquoi est-ce possible à priori ?).
   Réponse : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.
   Que vaut le déterminant de A ?
2. Résoudre le système linéaire $Bx = c$, avec $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, en utilisant la décomposition LU de B.

exercice 2 (Factorisation LU)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Elle n'est pas directement LU factorisable. Introduire une matrice de permutation P, donner alors les matrices L et U telles que $PA = LU$.

Réponse : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Résoudre de façon efficace le système linéaire $Ax = b$, avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

exercice 3 (Factorisation LU d'une matrice tridiagonale)

1. Licence Sciences L3, Analyse Numérique, U-Bourgogne 2016-2017

Soit

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale pour laquelle on suppose que les nombres $\delta_k = \det A_k,\ k = 1, \ldots, n$ sont tous différents de zéro.

a) On pose $\delta_0 = 1$. Vérifier que les δ_k satisfont la relation :

$$\delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2} \qquad 2 \le k \le n. \tag{1}$$

b) En déduire que la factorisation LU de A est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2\frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & & \\ & a_3\frac{\delta_1}{\delta_2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & c_{n-1} \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Remarque : on peut en tirer une méthode très économique de résolution de systèmes linéaires de la forme $Ax = b$.

exercice 4 (Matrice à diagonale strictement dominante)
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ ,\ |a_{i,i}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|.$$

Prouver que A est inversible (on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n)$ non nul tel que : $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$).

Que pouvez-vous dire des mineurs principaux de A ? (i.e des matrices $[a_{i,j}]_{1 \le i,j \le k}$ pour $k = 1, \ldots, n$).

exercice 5 (Perturbation)
Soit le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \text{de solution} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

On perturbe le second membre :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + \delta_{u_1} \\ u_2 + \delta_{u_2} \\ u_3 + \delta_{u_3} \\ u_4 + \delta_{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 23,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix} \quad \text{de solution} \quad \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Quelle est l'erreur relative sur le second membre ? Quelle est l'erreur relative sur la solution ? Que pouvez-dire sur ce **problème numérique** ?

exercice 6 (Problème numérique du choix du pivot)
On travaille avec trois chiffres significatifs.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 10^{-4}u_1 + u_2 & = & 1 \\ u_1 + u_2 & = & 2 \end{array} \right. \qquad (t = 3) \tag{5}$$

On a $u_1 = 1,00010\ldots \simeq 1, u_2 = 0,99990\ldots \simeq 1$.

Si on prend 10^{-4} pour pivot, on obtient $u_1 = 0, u_2 = 1$. Mais si on prend 1 pour pivot, on obtient $u_1 = u_2 = 1$. Analyser ce problème.