Université de Bourgogne
L2 **MaPC31** **2017/18**

TD 1 : Espaces euclidiens.

Ex 1. Indépendance linéaire dans $\mathbb{R}^3$

a) Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

b) Est-ce que ces vecteurs forment une base dans $\mathbb{R}^3$?

c) Calculer les coordonnées des vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dans cette base

d) Construire la matrice A telle que $e_j = Ae'_j$, $j = 1, 2, 3$ dans la base e_1, e_2, e_3.

e) Est-ce que c'est une matrice inversible ? Calculer A^{-1}

f) Calculer les produits scalaires $\langle e'_j, e'_k \rangle$, $j, k = 1, 2, 3$. Est-ce qu'il s'agit d'une base orthonormée ?

Ex 2. Produits scalaires dans $\mathbb{R}^2$

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et α un nombre réel. On définit l'application $G_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$G_\alpha(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \alpha(x_1y_2 + x_2y_1).$$

a) Montrer que G_α est une forme bilinéaire symétrique.

b) Pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = 1/2$, G_α est-il un produit scalaire ?

c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles G_α est un produit scalaire.

Ex 3. Identité de parallélogramme

Soit E espace euclidien. Montrer que pour $\forall x, y \in E$

$$||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Ex 4. Espaces de polynômes.

Soit $P_2([0,1])$ l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Le produit scalaire de deux polynômes $p(t), q(t) \in P_2([0,1])$ est défini par

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$$

a) Soit $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$ et $e_2(t) = t^2$. Montrer que ces vecteurs forment une base de $P_2([0,1])$. Est-ce que c'est une base orthonormée (calculer les produits scalaires et les normes) ?

b) Soit

$$\begin{aligned} v_0(t) =& \frac{e_0(t)}{||e_0||} \\ u_1(t) =& e_1(t) - \langle e_1, v_0\rangle\, v_0(t), \quad v_1(t) = \frac{u_1(t)}{||u_1||} \\ u_2(t) =& e_2(t) - \langle e_2, v_0\rangle\, v_0(t) - \langle e_2, v_1\rangle\, v_1(t), \quad v_2(t) = \frac{u_2(t)}{||u_2||} \end{aligned}$$

Calculer les polynômes $v_j(t)$, $t = 0, 1, 2$, montrer que c'est une base orthonormée.

c) Montrer que $p(t) \to \frac{d}{dt}(tp(t))$ est un opérateur linéaire $P_2([0,1]) \to P_2([0,1])$. Construire la matrice de cet opérateur dans la base e_j. Construire la matrice de cet opérateur dans la base v_j.

Ex 5. Changement de base dans $\mathbb{R}^2$.

Le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

est défini par $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$.

a) La matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

définie un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer (par le calcul direct) que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Quelle propriété de la matrice A on peut utiliser pour démontrer ce résultat ?

b) Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$. On défini la matrice U

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrer que $U^{-1} = U^t$.

c) Montrer que les vecteurs

$$e_1' = U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2' = U\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forment une base orthonormé.

d) Représenter l'opérateur $\mathcal{A}$ dans cette base.

e) Trouver l'angle θ pour lequel la matrice de l'opérateur $\mathcal{A}$ est diagonale.

Ex 6. Matrices orthogonales.

Soit $E = \mathbb{R}^3$

a) Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

sont des matrices orthogonales.

b) Calculer B^tAB. Est-ce que c'est une matrice orthogonale ?

Ex 7. Rotations et reflections dans $\mathbb{R}^3$

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Trouver les matrices de

a) la rotation d'angle $\pi/4$ autour du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) la rotation d'angle $2\pi/3$ autour du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) la reflection par rapport au plan d'equation $x_2 = 0$,

d) la reflection par rapport au plan d'equation $x_1 + x_2 - x_3 = 0$,

Ex 8. Produit vectoriel

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère la base orthonormée

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que pour toute matrice U

$$\langle Ue_1 \wedge Ue_2, Ue_3 \rangle = \det U$$

b) en déduire que si U est une matrice orthogonale

$$Ue_1 \wedge Ue_2 = \det U (Ue_3)$$