Université de Bourgogne
L2 **MaPC31** **2017/18**

TD 2 : Fonctions différentiables

Ex 1. Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une application différentiable, calculer $d\mathcal{A}$.

Ex 2. Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

a) Soit $f(x) = \langle \mathcal{A}x, x\rangle$. Montrer que $f(x)$ est une fonction différentiable, calculer $df(x)$.

b) Soit $g(x) = ||\mathcal{A}x||^2$. Montrer que $g(x)$ est une fonction différentiable, calculer $dg(x)$.

c) Soit $h(x) = \langle \mathcal{A}x, x\rangle^2$. Montrer que $h(x)$ est une fonction différentiable, calculer $dh(x)$.

Ex 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction f admet les dérivées partiel en $(x,y) = 0$.

b) Calculer la dérivé directionnelle $D_h f(0,0)$ pour $h = (1,1)$.

c) En déduire que f n'est pas différentiable en $(x,y) = 0$.

Ex 4. Calculer le gradient des fonctions suivantes $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

a) $f(x) = ||x||$, pour $x \neq 0$,

b) $f(x) = \langle a, x\rangle$, où $a \in \mathbb{R}^3$

c) $f(x) = \langle a, x\rangle\langle b, x\rangle$, où $a, b \in \mathbb{R}^3$,

d) $f(x) = ||a \wedge x||^2$, où $a \in \mathbb{R}^3$.

Ex 5. Calculer la matrice de Jacobi, la divergence et le rotationnel des applications (champs de vecteurs) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivantes

a) $F(x) = x||x||$,

b) $F(x) = x\langle a, x\rangle$, où $a \in \mathbb{R}^3$,

c) $F(x) = a \wedge x$, où $a \in \mathbb{R}^3$,

d) $F(x) = x \wedge (a \wedge x)$.

Ex 6. Déterminer le domaine de définition et calculer sur ce domaine le gradient des fonctions suivantes

a) $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 \sin(2x_2)}{x_3}$

b) $f(x_1, x_2) = e^{-\pi(x_1^2+x_2^2)} \cos(\pi(x_1^2 + x_2^2))$,

c) $f(x_1, x_2) = e^{x_1 \cos x_2} \sin^2 x_2$.

Ex 7. Soit $f(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable d'une variable et $g_f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie comme $g_f(x) = f(||x||)$.

a) Calculer ∇g_f,

b) Calculer $\langle x, \nabla g_f\rangle$,

c) Calculer $x \wedge \nabla g_f$.

Ex 8. On suppose que $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont différentiables.

a) Calculer $\nabla(fg)$,

b) Calculer $\nabla(f^n)$.

Ex 9. On suppose que $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sont différentiables.

a) Calculer $\nabla(\langle F, G\rangle)$,

b) Calculer $\mathrm{div}(F \wedge G)$,

c) Calculer $\mathrm{rot}(F \wedge G)$,

d) Calculer $\mathrm{rot}(\mathrm{rot} F)$.

Ex 10. On considère les champs de vecteurs $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $F(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2)$ et $G(y_1, y_2) = (y_1^2 - y_2^2, 2y_1 y_2)$.

a) Calculer la matrice de Jacobi de $F \circ G$

b) Calculer $\mathrm{div}(F \circ G)$

Ex 11. Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{aligned} x_1 =& \varphi_1(u, v) = \frac{1}{3}(u^3 - 3uv^2) \\ x_2 =& \varphi_2(u, v) = \frac{1}{3}(-v^3 + 3vu^2). \end{aligned}$$

a) Calculer la matrice de Jacobi $d\varphi$ de cette application

b) Calculer le Jacobien de cette application, montrer que φ est localement inversible si $(u, v) \neq (0, 0)$.

c) Soit $f \circ \varphi = u^2 + v^2$, calculer $(\nabla f) \circ \varphi$

d) Soit $F \circ \varphi = (u^2 - v^2, 2uv)$, calculer $(\mathrm{div} F) \circ \varphi$

Ex 12. Déterminer les points critiques des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

a) $f(x, y) = x^2 y - \frac{x^2}{2} - y^2$,

b) $f(x, y) = x^3 + x^2 y + y^2$,

c) $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 4y + 3$,

d) $f(x, y) = 3x^3 - x + 3y^2 + 3y - 5$,

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$

f) $f(x,y) = 2xy + 1/x^2 + 1/y^2$,

g) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$,

h) $f(x,y) = \exp(x^2 - y^2)$,

i) $f(x,y) = 2xy^2 - x^2y + 6x$.