2016/17

Master IMSP-Relativité Générale

TD1 (variétés et tenseurs)

1. Construire un atlas pour la variété différentiable S^2 définie comme

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{tels que } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}\ .$$

2. Étant donnée la variété différentiable M et un tenseur $\mathbf{T} \in \binom{n}{m}$, n fois contravariant et m fois covariante, montrer la loi de transformation de coordonnées entre deux systèmes de coordonnées $\{x\}$ et $\{x'\}$. C'est a dire, étant donnés

$$\mathbf{T} = T^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_n}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_m}$$

et

$$\mathbf{T} = T'^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m} \frac{\partial}{\partial x'^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x'^{i_n}} \otimes dx'^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx'^{j_m}\ ,$$

montrer

$$T'^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m} = \left(\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\right) \ldots \left(\frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{k_n}}\right) \left(\frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}}\right) \ldots \left(\frac{\partial x^{l_m}}{\partial x'^{j_m}}\right) T^{k_1 \ldots k_n}{}_{l_1 \ldots l_m}$$

3. On définit les deux cartes locales sur $\mathbb{R}^2$

a) Cartésiennes :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_1 & : U_1 = \mathbb{R}^2 & \to & \tilde{U}_1 = \mathbb{R}^2 \\ & p & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ (notez que cette carte est en fait globale).

b) Polaires :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_2 & : U_2 \subset \mathbb{R}^2 & \to & \tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^2 \\ & p & \mapsto & (r, \phi) \end{array}$$

avec $r \in]0, \infty[$ et $\phi \in]0, 2\pi[$.

La transformation entre les cartes $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \tilde{U}_2 \to \tilde{U}_1$ est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(r, \phi) = r \cos\phi \\ y = y(r, \phi) = r \sin\phi \end{array} \right. .$$

Écrire, là où c'est possible :

i) Les vecteurs ∂_r et ∂_ϕ en termes de ∂_x et ∂_y.

ii) Les vecteurs ∂_x et ∂_y en termes de ∂_r et ∂_ϕ.

iii) Les formes dx et dy en termes de dr et $d\phi$.

iv) Les formes dr et $d\phi$ en termes de dx et dy.

v) Le vecteur

$$\mathbf{v} = 4x\partial_x - xye^{x^2+y^2}\partial_y\ ,$$

dans la base $\{\partial_r, \partial_\phi\}$.

4. On considère $\mathbb{R}^3$ et les coordonnées cartésiennes $\{x, y, z\}$ (où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$) et coordonnées sphériques $\{r, \theta, \phi\}$ (où $r \in]0, \infty[$, $\theta \in]0, \pi[$ et $\phi \in]0, 2\pi[$), avec changement de coordonnées

$$\begin{cases} x = x(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \cos\phi \\ y = y(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \sin\phi \\ z = z(r, \theta, \phi) = r \cos\theta \end{cases} .$$

   i) Écrire explicitement les cartes locales associées à chaque systèmes de coordonnées (c.à.d. les expressions à celles de l'exercice 3.

   ii) Écrire en coordonnées sphériques la métrique (euclidiènne) plate, donnée par l'expression

$$\mathbf{g} = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$