2016/17

Master IMSP-Relativité Générale

TD2 (tenseurs er courbes)

1. **[Gymnastique d'indices]**.

   i) Étant donné le tenseur $\boldsymbol{T} \in \binom{2}{3}$

   $$\boldsymbol{T} = T^{\mu\nu}{}_{\rho\lambda\sigma}\partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes dx^\rho \otimes dx^\lambda \otimes dx^\sigma$$

   est la métrique $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$, écrire explicitement les composantes correspondantes aux tenseurs $\binom{0}{5}$, $\binom{1}{4}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{5}{0}$ obtenues par isomorphisme métrique.

   ii) Étant donnée $\mathbb{R}^3$ avec la métrique d'élément de ligne

   $$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \ ,$$

   et le tenseur $\binom{1}{1}$

   $$\boldsymbol{T} = r\ \partial_r \otimes d\theta + r\sin\theta\ \partial_r \otimes d\phi \ ,$$

   construire les correspondants tenseurs $\binom{2}{0}$ et $\binom{0}{2}$.

2. **[Cônes de lumière et métriques conformément équivalentes]**

   i) Étant donné la métrique de Minkowski bi-dimensionnelle $\boldsymbol{\eta}$ définie par son élément de ligne

   $$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 \ ,$$

   déterminer les "cônes" de lumière à partir des équations qui correspondent à la condition $ds^2 = 0$.

   ii) La même chose pour la métrique $\boldsymbol{g^{(1)}}$ définie par définie par son élément de ligne

   $$ds^2 = g^{(1)}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(t,x)dt^2 + \frac{1}{f^2(t,x)}dx^2 \ ,$$

   où $f(t,x)$ est non négative. Noter que Minkowski est récupéré pour $f(t,x) = 1$.

   iii) La même chôse pour la métrique $\boldsymbol{g^{(2)}}$ définie par

   $$ds^2 = g^{(2)}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \Omega^2(t,x)\left(-f(t,x)dt^2 + \frac{1}{f^2(t,x)}dx^2\right) \ ,$$

   où $\Omega^2(t,x) > 0$. On dit que la métrique $\boldsymbol{g^{(1)}}$ et $\boldsymbol{g^{(2)}}$ sont conformément équivalentes.

   iv) De façon générale montrer que deux métriques $\boldsymbol{g}$ et $\tilde{\boldsymbol{g}}$ conformément équivalentes, c'est-à-dire telles qu'il existe $\Omega^2(t,x) > 0$ avec

   $$\tilde{\boldsymbol{g}} = \Omega^2\boldsymbol{g} \ \Leftrightarrow d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 \Leftrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}\Omega^2 g_{\mu\nu} \ , \tag{1}$$

   ont le même structure de cônes de lumière et alors la même structure causale.

3. **[Type métrique d'une courbe]**.

   Étant donnée l'espace-temps $(M, \boldsymbol{q})$, le type métrique d'une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$, dans le point $p = \gamma(\lambda)$ avec coordonnées $x^\mu = \gamma^\mu(\lambda)$ est déterminé para le signe de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = g_{\mu\nu}\frac{d\gamma^\mu}{d\lambda}\frac{d\gamma^\nu}{d\lambda}$, où $\boldsymbol{v} = \frac{d\gamma^\mu}{d\lambda}\partial_\mu$ est le vecteur tangent à γ dans le point $p = \gamma(\lambda)$. Avec le choix de signature $(- + \ldots +)$ pour la métrique, on dit que la courbe est :

i) Type temps : si $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < 0$.
ii) Type lumière (ou isotrope) : si $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$.
iii) Type espace : si $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$.
La courbe gamma est causale si elle toujours type temps o lumière.
Étant donnée a métrique de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 \ ,$$

déterminer le type métrique des courbes γ_1, γ_2 et γ_3

$$\gamma_1^\mu(\lambda) = \begin{cases} t = \lambda \\ x = a\lambda \end{cases} \quad \text{(en fonction de la valeur du paramètre } a\text{)} \ ,$$

$$\gamma_2^\mu(\lambda) = \begin{cases} t = \lambda \\ x = \lambda + 2\pi \sin\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) \end{cases}$$

$$\gamma_3^\mu(\lambda) = \begin{cases} t = \sin\lambda \\ x = \cos\lambda \end{cases}$$

4. **[Observateurs]**
On définit un *observateur* comme une courbe temporelle γ orientée vers le future et normalisée telle que son vecteur tangente $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\gamma}'$ satisfait $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}' = -1$.
i) Si on considère la courbe γ_1 de l'exercice précédent pour les valeurs de a qui la font temporelle, normaliser la courbe (en particulier le vecteur tangent) de telle manière que γ_1 représente un observateur.
ii) Montrer que, en générale, étant donnée une courbe temporelle $\lambda \mapsto \gamma(\lambda)$, sa reparametrization $\tau \mapsto \lambda \mapsto \gamma(\tau)$ définie par le temps propre, c'èst à dire

$$d\tau = \left(-g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

satisfait $g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu}{d\tau} \frac{d\gamma^\nu}{d\tau} = -1$ et alors correspond à un observateur.

5. [**Temps propre, distance propre le long d'une courbe**]
Étant donnée la métrique avec élément de ligne

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

déteminer :
i Le temps propre le long des courbes, avec $r_- < r_+$ constantes, de $\lambda_i = 0$ à $\lambda_f = T$

$$\gamma_1^\mu(\lambda) = \begin{cases} t = \lambda \\ r = r_- \\ \theta = \theta_0 = \text{const} \\ \phi = \phi_0 = \text{const} \end{cases}$$

$$\gamma_2^\mu(\lambda) = \begin{cases} t = \lambda \\ r = r_+ \\ \theta = \theta_0 = \text{const} \\ \phi = \phi_0 = \text{const} \end{cases}$$

ii) La distance propre le long de la courbe γ de $\lambda = 0$ à $\lambda = R$:

$$\gamma^\mu(\lambda) = \begin{cases} t = t_0 = \text{const} \\ r = \lambda \\ \theta = \theta_0 = \text{const} \\ \phi = \phi_0 = \text{const} \end{cases}$$

iii) Quel est le temps/distance propre le long d'une trajectoire type lumière ?