2016/17

Master IMSP-Relativité Générale

TD3 (dérivée covariante et courbure)

1. [**Élement de volume**].
   On définie la mesure d'intégration (ou élement de volume métrique) associé à la métrique $\boldsymbol{g}$, comme

$$\mu_g = dV = \sqrt{|g|}d^n x \ ,$$

   où g est le déterminant de la matrice associée à la métrique dans la carte locale $\{x\}$. On va montrer que cette expression ne dépend pas de la carte locale.
   avec expression dans una carte locale $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, la
   Étant donnée une metrique dans deux systèmes de coordionn $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu}$
   i) Dériver la transformation entre les composantes $g'_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ en deux cartes locales $\{x\}$ et $\{x'\}$.
   ii) Dériver la règle de transformation entre deux cartes locales du déterminant g.
   iii) Considérer l'intégral d'une fonction scalaire dans un domaine D

$$\int_D f(x)dV = \int_D f(x)\sqrt{|g|}d^n x \ .$$

   Montrer que cette intégrale ne dépend pas du système de coordonnée

2. [**Variation du déterminant**]
   Démontrer l'expression

$$\delta \ln |g| = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \ .$$

   [Voir indications dans le cours].

3. [**Laplacien/D'Alembertian : expression coordonnée**]
   On définit le Laplacien/D'Alembertien scalaire Δ associée à la métrique $\boldsymbol{g}$ comme un opérateur différentiel qui agit sur un scalaire ϕ comme

$$\Delta\phi = \nabla^\mu\nabla_\mu\phi = \nabla_\mu\nabla^\mu\phi = g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi \ .$$

   i) Étant donnée un vecteur $\boldsymbol{V} = V^\mu\partial_\mu$, montrer que le scalaire (divergence) définit comme $\nabla_\mu V^\mu$ a l'expression explicite en coordonnées

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\sqrt{g}\ V^\mu\right) \ .$$

   Partir de l'expression en termes des symboles de Christoffel, écrire les dernières en termes de la métrique et utiliser le résultat de l'exercice précédent.
   ii) Appliquer le résultat précédent au Laplacien/D'Alembertien scalaire pour obtenir

$$\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\sqrt{g}\ g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) \ .$$

4. [**Courbure de la sphere S^2**].
   Donnée la métrique $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ sur S^2, définie par l'élément de ligne

   $$ds^2 = r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \ ,$$

   calculer le tenseur de Riemann $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et le scalaire de Ricci R.

5. [**Courbure de l'espace-temps de Anti-de Sitter**].
   Donnée la métrique $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ sur $\mathbb{R}^2_+$, définie par l'élément de ligne

   $$ds^2 = \frac{H}{y^2} \left(-dt^2 + dy^2 \right) \ ,$$

   calculer le tenseur de Riemann $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et le scalaire de Ricci R.