Math21 Semestre 2 – Analyse 2

Institut de Mathématiques de Bourgogne (IMB)
Université de Bourgogne Franche-Comté

Organisation

- CM : 23 heures, 12 séances. TD : 32 heures, 16 séances.
- Page web : `http://jaramillo.perso.math.cnrs.fr/Courses/Math21/Math21.html`

Intervenants

- J.L. Jaramillo (resp. Bureau: A323), CM et TD (`Jose-Luis.Jaramillo@u-bourgogne.fr`).
- B.-M. Kohli, TD (`Ben-Michael.Kohli@u-bourgogne.fr`).
- C. Labruère, TD (`Catherine.Labruere@u-bourgogne.fr`).
- R. Ramanakoraisina, TD (`Rodolphe.Ramanakoraisina@u-bourgogne.fr`).
- R. Uribe-Vargas, TD (`R.Uribe-Vargas@u-bourgogne.fr`).

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres réels

1.1 Entiers, rationnels, et les autres

Lorsqu'on a commencé à mesurer des longueurs, on a utilisé des nombres entiers puis des franctions de nombres entiers : les nombres rationnels. Les grecs anciens (l'école de Pythagore) se sont rendus compte que les nombres rationnels ne suffisent pas à mesurer toutes les longeurs. Ils ont en particulier observé que la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas une longueur rationnelle.

Théorème 1.1. *Il n'existe pas de nombre rationnel a tel que $a^2 = 2$.*

Preuve. La démonstration est très simple. Supposons qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $2 = p^2/q^2$. Quitte à diviser p et q un nombre suffisant de fois par 2, on peut supposer que p ou q est impair. On a l'égalité

$$\frac{p^2}{q^2} = 2\,,$$

c'est-à-dire

$$p^2 = 2q^2\,.$$

Donc p^2 est pair et nécessairement p aussi. On pose donc $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}^*$. Il suit que

$$q^2 = 2p'^2\,.$$

Donc q^2 est pair, d'où q aussi, ce qui contredit l'hypothèse. □

On peut aussi montrer que l'ensemble des rationnels dont le carré est plus petit que 2 n'a pas de "borne supérieure" dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.1. *Soit*

$$E = \{x \in \mathbb{Q}\,;\; x^2 \leq 2\}\,.$$

L'ensemble E n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (la borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant, on verra cette définition et son utilisation très bientôt dans le cours).

Preuve. Supposons que E ait une borne supérieure a dans $\mathbb{Q}$, nous allons montrer que $a^2 = 2$, ce qui contredira $a \in \mathbb{Q}$. Pour cela, on va montrer qu'on ne peut pas avoir $a^2 > 2$ ni $a^2 < 2$. Supposons que $a^2 > 2$. On peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$2 < a^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2a}{n} \text{ (i.e. } \frac{1}{n} < a - \sqrt{2})\,.$$

Alors $a - 1/n \in \mathbb{Q}$ et $(a-1/n)^2 > 2$. Donc a n'est pas le plus petit majorant de E, ce qui est absurde. On doit donc avoir $a^2 \leq 2$. De même, supposons que $a^2 < 2$, alors on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$a^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2a}{n} < 2 \text{ (i.e. } a + \frac{1}{n} < \sqrt{2}) .$$

Donc a n'est pas un majorant de E. On doit donc avoir $a^2 \geq 2$. Il suit que $a^2 = 2$ et donc $a \notin \mathbb{Q}$. □

Devant l'insuffisance des nombres rationnels, on construit ce qu'on appelle maintenant l'ensemble $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels. On peut le construire de deux façons équivalentes (équivalentes signifiant ici qu'on obtient le même ensemble).

1. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des limites de suites d'éléments de $\mathbb{Q}$ (on verra dans le chapitre 2 la notion de suite et de limite).

2. $\mathbb{R}$ est le plus petit corps contenant le corps $\mathbb{Q}$ comme sous-corps, dont la relation d'ordre prolonge celle de $\mathbb{Q}$ et dans lequel toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure. Comme $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas cette dernière propriété, on a une inclusion stricte de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

La première définition de $\mathbb{R}$ est constructive et intuitive au sens où le développement décimal d'un nombre réel x donne précisément une suite de rationnels qui tend vers x. Attention, ce développement n'est pas unique, en effet on a

$$1 = 0.9999999999999999...$$

à condition bien sûr qu'il y ait une infinité de 9 dans le développement. On voit notamment ici que la suite

$$u_0 = 0\,,\ u_1 = 0.9\,,\ u_2 = 0.99\,,\ u_3 = 0.999\,, ...$$

tend vers 1.

Il y a plusieurs classes de nombres intéressants dans $\mathbb{R}$:

- nombres entiers naturels $\mathbb{N}$;
- nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$;
- nombres rationnels $\mathbb{Q}$;
- nombres algébriques $\mathcal{A}$; ce sont les nombres qui sont racines d'un polynôme réel à coefficients entiers ;
- nombres calculables $\mathcal{C}$ qui sont les nombres dont on peut calculer les décimales à l'aide d'un algorithme ;
- nombres non calculables $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$;
- nombres transcendants $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$.

Tous les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ sont dénombrables, c'est-à-dire qu'on peut tous les compter avec les entiers naturels. On peut par exemple montrer cette propriété facilement au tableau pour l'ensemble $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ en revanche est non dénombrable. Donc les nombres transcendants, de même que les nombres non calculables, sont bien plus nombreux que les entiers, les rationnels, les nombres algébriques et les nombres calculables. On a les inclusions strictes suivantes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \mathbb{R}\,.$$

Parmi les nombres algébriques, il n'y a pas que des rationnels, par exemple $\sqrt{2}$ est algébrique, car $\sqrt{2}^2 = 2$, mais il n'est pas rationnel. Parmi les nombres calculables, il y a des nombres transcendants, comme π ou e.

1.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

1.2.1 Corps totalement ordonné

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni des lois internes $+, \times$ et de la relation d'ordre $\leq$ est un corps totalement ordonné, c'est-à-dire que

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps :
  - $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif,
  - $\times$ est associative,
  - $\mathbb{R}$ possède un élément neutre pour $\times$,
  - $\times$ est distributive par rapport à $+$,
  - $\times$ est commutative,
  - tout élément non nul de $\mathbb{R}$ admet un inverse pour $\times$;
- la relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$:
  - réflexive : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$,
  - antisymétrique : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x$ implique que $x = y$,
  - transitive : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq z$ implique que $x \leq z$,
  - totale : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$;
- pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ tels que $x \leq y$ et $z \geq 0$, on a $xz \leq yz$.

1.2.2 La valeur absolue

Définition 1.1. La valeur absolue d'un nombre réel est définie par

$$|x| = \max(x, -x) = \left\{ \begin{array}{rl} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{si } x \leq 0\,. \end{array} \right.$$

La valeur absolue a des propriétés importantes à retenir et dont la démonstration est immédiate.

Proposition 1.2. *Etant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ et h un réel strictement positif, on a*

1. $|x| \geq 0$,

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. $|x - y| \leq h \Leftrightarrow y - h \leq x \leq y + h$,
4. $|xy| = |x||y|$,
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

La dernière inégalité est connue sous le nom d'inégalité triangulaire.

On a une conséquence utile de l'inégalité triangulaire.

Corollaire 1.1. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|\,.$$

Preuve. On a $x = x - y + y$ d'où par l'inégalité triangulaire

$$|x| \leq |x - y| + |y|\,,$$

c'est-à-dire

$$|x| - |y| \leq |x - y|\,.$$

Mais bien sûr on peut intervertir x et y et on a donc aussi

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|\,.$$

On en déduit donc que

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|\,.$$

Ceci conclut la preuve. □

1.2.3 Propriétés de la borne supérieure

Définition 1.2. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de X est le plus petit des majorants de X. La borne inférieure de X est le plus grand des minorants de X.

Remarque 1.1. 1. Si la borne supérieure d'une partie X de $\mathbb{R}$ est un élément de X, c'est le plus grand élément de X noté $\max X$.

2. Si la borne inférieure d'une partie X de $\mathbb{R}$ est un élément de X, c'est le plus petit élément de X noté $\min X$.

On admettra que $\mathbb{R}$ vérifie le principe de la borne supérieure qui s'exprime ainsi :

Proposition 1.3 (Principe de la borne supérieure)**.** *La borne supérieure de toute partie non vide de $\mathbb{R}$ existe et est ou bien un réel (si la partie est majorée) ou bien $+\infty$.*

Remarque 1.2. Evidemment, on peut aussi énoncer le principe de la borne inférieure : la borne inférieure de toute partie non vide de $\mathbb{R}$ existe et est ou bien un réel (si la partie est minorée) ou bien $-\infty$.

La borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ est caractérisée de la façon suivante.

Proposition 1.4. • *Soit X une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Sa borne supérieure est l'unique $a \in \mathbb{R}$ tel que :*

1. *pour tout $x \in X$, $x \leq a$ (i.e. a est un majorant de X) ;*
2. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $a - \varepsilon < x$.*

• *Soit X une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Sa borne inférieure est l'unique $a \in \mathbb{R}$ tel que :*

1. *pour tout $x \in X$, $x \geq a$ (i.e. a est un minorant de X) ;*
2. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $a + \varepsilon > x$.*

Preuve. Nous démontrons simplement la caractérisation de la borne supérieure, celle de la borne inférieure se démontre de façon similaire. La première condition exprime simplement que a est un majorant. La seconde est équivalente au fait qu'il n'existe pas de majorant plus petit que a ; en effet, tout nombre strictement plus petit que a s'écrit sous la forme $a - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et la condition *2* exprime que tout nombre plus petit que a n'est pas un majorant de X. Les conditions *1* et *2* sont donc équivalentes au fait que a est la borne supérieure de X. □

1.3 Propriété d'Archimède, partie entière

Proposition 1.5. $\mathbb{R}$ *est Archimédien, c'est-à-dire : pour tout $x > 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx \geq y$.*

Preuve. Supposons que ce soit faux : il existe $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $nx \leq y$. Alors l'ensemble

$$A = \{nx\,;\; n \in \mathbb{N}\}$$

est une partie majorée (par y) de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne supérieure $a \in \mathbb{R}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)x \leq a$ et donc $nx \leq a - x$. Donc $a - x$ est un majorant de A et $a - x < a$. C'est impossible car a est la borne supérieure de A. □

On peut donner une propriété plus précise qui amène naturellement la notion de partie entière.

Proposition 1.6. *Etant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leq x < (n+1)a$.*

Preuve. Commençons par montrer l'unicité. Supposons que n et n' soient des entiers relatifs tels que

$$na \leq x < (n+1)a \text{ et } n'a \leq x < (n'+1)a\,.$$

Alors

$$n \leq \frac{x}{a} < n+1 \text{ et } n' \leq \frac{x}{a} < n'+1\,.$$

On a aussi

$$n \leq \frac{x}{a} < n'+1\,,$$

ce qui implique $n - n' < 1$, i.e. $n - n' \leq 0$ car n et n' sont des entiers, et

$$n' \leq \frac{x}{a} < n+1\,,$$

ce qui implique $n' - n < 1$, i.e. $n' - n \leq 0$. Il suit $n = n'$.

Montrons maintenant l'existence. Comme $\mathbb{R}$ est Archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na \geq -x$. L'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{Z}\,;\ na \leq x\}$$

est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, elle contient donc un plus grand élément n_1. Comme $n_1 + 1 \notin A$, on a

$$n_1 a \leq x < (n_1 + 1)a\,.$$

Ceci conclut la preuve. $\square$

Si on applique la proposition ci-dessus avec $a = 1$, l'entier n obtenu s'appelle la partie entière de x.

Définition 1.3. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$ s'appelle la partie entière de x et est noté $[x]$.

1.4 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Ceci signifie :

Proposition 1.7. *Etant donnés $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.*

Preuve. Posons

$$q = \left[\frac{1}{y - x}\right] + 1 \text{ et } p = [qx]\,.$$

On a alors

$$q > \frac{1}{y - x}\,,\ q \geq 1 > 0$$

et

$$p \leq qx < p + 1\,.$$

Comme $q > 0$, on peut diviser par q cette dernière inégalité :

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p + 1}{q}\,.$$

On en déduit que

$$x < \frac{p + 1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y\,.$$

Donc le rationnel $\frac{p+1}{q}$ est dans l'intervalle $]x, y[$.

Peut-on aussi trouver un irrationnel dans cet intervalle? C'est facile : on peut trouver un rationnel r dans l'intervalle $]x+\sqrt{2}, y+\sqrt{2}[$, le nombre $r-\sqrt{2}$ est irrationnel et est dans l'intervalle $]x, y[$. $\square$

1.5 Éléments topologiques de $\mathbb{R}$

1.5.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.4. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \le x \le b\}\,,\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \le x < b\}\,,\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x \le b\}\,,\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x < b\}\,,\\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \le x\}\,,\\
]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x\}\,,\\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R}\,;\; x \le b\}\,,\\
]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R}\,;\; x < b\}\,.
\end{aligned}$$

Définition 1.5. Un ensemble C est dit convexe lorsque, pour tous x et y de C, l'intervale (segment) $[x,y]$ est complètement dans C, c'est-à-dire :

$$\forall x,y \in C, \forall t \in [0,1] \quad tx+(1-t)y \in C$$

Proposition 1.8. *Les intervalles de X sont les parties convexes de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les parties P de $\mathbb{R}$ telles que, quels que soient $x, y \in P$, $x < y$, on a $[x,y] \subset P$.*

Preuve. Les intervalles sont évidemment convexes. Réciproquement, si P est une partie convexe de $\mathbb{R}$, soit $a = \inf P$, $b = \sup P$. Alors $]a,b[\subset P$ et la seule question est de savoir si a, b sont ou non infinis et sont ou non dans P. On a huit cas possibles :

1. $-\infty < a$, $b < +\infty$, $a \in P$, $b \in P$, alors $P = [a,b]$;
2. $-\infty < a$, $b < +\infty$, $a \in P$, $b \notin P$, alors $P = [a,b[$;
3. $-\infty < a$, $b < +\infty$, $a \notin P$, $b \in P$, alors $P =]a,b]$;
4. $-\infty < a$, $b < +\infty$, $a \notin P$, $b \notin P$, alors $P =]a,b[$;
5. $a = -\infty$, $b < +\infty$, $b \in P$, alors $P = [-\infty,b]$;
6. $a = -\infty$, $b < +\infty$, $b \notin P$, alors $P =]-\infty,b[$;
7. $a > -\infty$, $b = +\infty$, $a \in P$, alors $P = [a,+\infty]$;
8. $a > -\infty$, $b = +\infty$, $a \notin P$, alors $P =]a,+\infty[$. □

1.5.2 $\bar{\mathbb{R}}$

Définition 1.6. L'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{R}$ auquel on ajoute les éléments $+\infty$ et $-\infty$:

$$\bar{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\,.$$

Il est muni d'une relation d'ordre totale héritée de celle sur $\mathbb{R}$ en posant de plus pour tout $x \in \bar{\mathbb{R}}$

$$-\infty \le x \le +\infty\,.$$

On a les propriétés suivantes :

- $+\infty$ est le plus grand élément de $\bar{\mathbb{R}}$;
- $-\infty$ est le plus petit élément de $\bar{\mathbb{R}}$;
- toute partie de $\bar{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$;
- toute partie de $\bar{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Les opérations $+$ et $\times$ se prolongent en partie à $\bar{\mathbb{R}}$, certaines opérations ne sont pas définies, comme par exemple $+\infty + (-\infty)$. On a les tables suivantes :

$+$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$y \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}^{-*}$	0	$x \in \mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$y \in \mathbb{R}^{-*}$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$y \in \mathbb{R}^{+*}$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

1.5.3 Notions topologiques

La compréhension des concepts liées aux limites et à la continuité, qu'on étudiera dans la section 3.1, est naturellement possée dans une perspective dite topologique. D'autre part, la droite réelle $\mathbb{R}$ proportionne un example très riche pour l'introduction et discussion des éléments topologiques de base. Nous introduissons ici quelques notions topologiques basiques, comme motivation pour des cours plus avancés sur le sujet.

Définition 1.7. (*intérieur d'un ensemble*). Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous dissons que a est un *point intérieure* de A s'il existe un nombre réel positif δ, tel que $(a-\delta, a+\delta) \subset A$. L'ensemble des points intérieurs es nommé *intérieur* de A est noté par int$A$ ou $\mathring{A}$.

Définition 1.8. (*adhérence d'un ensemble*). Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous dissons que a est un *point adhérent* de A si $\forall \delta > 0$ on a

$$(a-\delta, a+\delta) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points adhérents est nommé *adhérence* de A est noté par $\bar{A}$.

Définition 1.9. (*point d'accumulation*). Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous dissons que a est un *point d'accumulation* de A si $\forall \delta > 0$ on a

$$(a-\delta, a) \cap (a, a+\delta) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points d'accumulations est nommé *ensemble derivé* de A est noté par A'. On a $\bar{A} = A \cup A'$.

Exemple. Adhérence et accumulation n'est coïncide pas en générale. Soit l'ensemble $A = \{1\} \cup]2,3[$. On vérifie

$$\bar{A} = \{1\} \cup [2,3] \quad , \quad A' = [2,3]$$

Définition 1.10. (*frontière d'un ensemble*). Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous dissons que a est un *point frontière* de A si $\forall \delta > 0$ on a

$$(a-\delta, a+\delta) \cap A \neq \emptyset \; et \; (a-\delta, a+\delta) \cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset \; ,$$

c'est-à-dire, si $a \in \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A}$. L'ensemble des points frontière est nommé *frontière* de A est noté par ∂A. On a $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A}$.

Ensembles ouverts et fermés

Définition 1.11. (*ensembles ouverts et fermés*). Soit $A \in \mathbb{R}$. L'ensemble A est ouvert si vérifie $\mathrm{int} A = A$ (c.à.d $\mathring{A} = A$) et est fermé si $\bar{A} = A$.

Propriétés: Soit Ω un emsemble d'indices et la famille d'ensembles $\{A_i, i \in \Omega\}$. On vérifie:

i) Si Ω est un ensemble quelquonque (en particulier infini) et A_i sont ouverts

$$A = \bigcup_{i \in \Omega} A_i \text{ est ouvert .}$$

ii) Si Ω est un ensemble quelquonque (en particulier infini) et A_i sont fermés

$$A = \bigcap_{i \in \Omega} A_i \text{ est fermé .}$$

iii) Si Ω est un ensemble fini et A_i sont ouverts

$$A = \bigcap_{i \in \Omega} A_i \text{ est ouvert .}$$

iv) Si Ω est un ensemble fini et A_i sont fermés

$$A = \bigcup_{i \in \Omega} A_i \text{ est fermé .}$$

Définition 1.12. (*ensemble borné*). Soit $A \in \mathbb{R}$. L'ensemble A est borné s'il existe un réel $M > 0$ tel que $A \subset (-M, M)$.

Définition 1.13. (*ensemble compacte*). Soit $A \in \mathbb{R}$. L'ensemble A est compact s'il est fermé et borné.

Le comportament des espaces ouverts, fermés et compacts est particulièrement important dans l'étude de la continuité.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Définitions

Définition 2.1. On appelle suite réelle un ensemble de nombres réels indexés par $\mathbb{N}$, i.e. une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Au lieu de noter $u(n)$ les éléments d'une suite u, on les notera plutôt u_n et la suite est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On considérera aussi des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq n_0}$.

Deux exemples fondamentaux.

- **Suite arithmétique.** On appelle suite arithmétique de premier terme a et de raison r la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_n = a + nr\,.$$
On peut calculer la somme des $n+1$ premiers termes d'une telle suite
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + (a+nr)\\ &= (n+1)a + \underbrace{(1+2+\cdots+n)}_{S}\,r\,.\end{aligned}$$
On a
$$\begin{array}{rccccccc} S= & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n\\ S= & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 1\end{array} \tag{2.1}$$
Si on fait l'addition:
$$2S = n(n+1) \implies S = \frac{n(n+1)}{2}\,, \tag{2.2}$$
et on trouve finalement
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)a + r\frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{2.3}$$

- **Suite géométrique.** On appelle suite géométrique de premier terme a et de raison λ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_n = a\lambda^n\,.$$

On peut calculer la somme des $n+1$ premiers termes d'une telle suite

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a + a\lambda + a\lambda^2 + \ldots + a\lambda^n = a\underbrace{\left(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^n\right)}_{S} \tag{2.4}$$

Maintenant on a

$$\begin{array}{rccccccccc} S = & 1 & + & \lambda & + & \ldots & + & \lambda^n & & \\ \lambda S = & & & \lambda & + & \ldots & + & \lambda^n & + & \lambda^{n+1} \end{array}, \tag{2.5}$$

En faisant la différence

$$(1-\lambda S) = 1-\lambda^{n+1} \implies S = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\,. \tag{2.6}$$

Finalement

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\,. \tag{2.7}$$

Définition 2.2. Une suite est dite constante si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n. Elle est dite stationnaire si $u_{n+1} = u_n$ au delà d'un certain rang, i.e. s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Définition 2.3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

- majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$,
- minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$,
- bornée si elle est majorée et minorée, i.e. s'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Définition 2.4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$,
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$,
- strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$,
- strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$,
- monotone si elle est croissante ou décroissante,
- strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Définition 2.5 (Convergence)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Définition 2.6 (Suite divergente)**.** On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- tend vers $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq A$,
- tend vers $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq A$.

Dans les deux cas, on dira que la suite est divergente. On dira aussi qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Autrement dit, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente si et seulement si la suite $(1/u_n)$ (définie pour $n \in \mathbb{N}$ ou pour $n \geq n_0$ si certains des premiers termes de (u_n) sont nuls) converge vers 0.

Définition 2.7 (Sous-suite)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle sous-suite, ou suite extraite, de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. On notera aussi fréquemment les suites extraites $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $k \mapsto n_k$ étant une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Remarque 2.1. Si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, on a $\phi(n) \geq n$.

Exemples.

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante est convergente vers u_0.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ donné, la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $|\lambda| < 1$, est constante égale à 1 si $\lambda = 1$ et n'a pas de limite dans les autres cas ; elle diverge pour $|\lambda| > 1$ et tend vers $+\infty$ pour $\lambda > 1$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, la suite $(1/n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 si $\alpha > 0$, est constante égale à 1 si $\alpha = 0$, tend vers $+\infty$ si $\alpha < 0$.
4. Toute suite arithmétique de raison $r \neq 0$ est divergente (elle est constante si la raison est nulle) ; elle tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$.
5. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite et n'est pas divergente. Sa sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et sa sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à -1 ; ces deux sous-suites sont donc convergentes et ont des limites différentes.

2.2 Propriétés des suites convergentes et critères de convergence

Proposition 2.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et ℓ sa limite, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.*

Preuve. C'est une conséquence directe de l'inégalité

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|\,. \quad \square$$

Proposition 2.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors elle est bornée.*

Preuve. Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite de la suite et $\varepsilon > 0$ donné, prenons par exemple $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \in [l-1, l+1]$. On pose

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{n_0-1}|, |l-1|, |l+1|\}\,.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leq M$. $\square$

Proposition 2.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$, alors elle est minorée.*

Preuve. La démonstration ressemble beaucoup à celle de la proposition précédente. Soit par exemple $A = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq A$. Soit

$$m = \min\{u_0, u_1, ..., u_{n_0-1}, A\},$$

alors $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Proposition 2.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.*

Preuve. Soit $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de la suite (u_n). Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. On sait aussi que $n_k \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $k \geq n_0$ on a $|u_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ. □

On en déduit une façon de montrer qu'une suite ne converge pas.

Corollaire 2.1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite ne convergeant pas, ou admet deux sous-suites convergentes mais ayant des limites différentes, alors la suite ne converge pas.*

Proposition 2.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > 0$. Plus précisément il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > \delta$.*

Preuve. On applique la définition de la limite avec $\varepsilon = \ell/2$, on prend un n_0 correspondant et par exemple $\delta = \ell/4$. □

Théorème 2.1 (Comparaison)**.**

1. **Théorème de l'encadrement, ou du pincement** *(Appelé aussi théorème des gendarmes.) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques. On suppose que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

   Alors la suite (v_n) est convergente de limite l.

2. **Une application importante.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques, on suppose que $v_n \geq 0$ pour tout n. Si $|u_n| \leq v_n$ au delà d'un certain rang et si la suite (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.*

3. *$|u_n| \geq v_n$ au delà d'un certain rang et si la suite (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) diverge.*

Preuve.

1. Soit $\varepsilon > 0$, on sait que
   - $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $l - \varepsilon \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$,
   - $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$ on ait $l - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$.

   Alors en posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a pour tout $n \geq n_0$

$$l - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon.$$

   La suite (u_n) est donc convergente de limite ℓ.

2. C'est une application directe du théorème des gendarmes avec les suites $(-v_n)$ et $v_n)$ qui encadrent (u_n) pour n assez grand.

3. immédiat. □

Proposition 2.6 (Estimation a priori). *Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée est convergente et sa limite est $\sup\{u_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée est décroissante et sa limite est $\inf\{v_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$.*

Preuve. On démontre la première assertion. La deuxième est similaire, il suffit de changer les signes. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. Soit

$$\ell = \sup\{u_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Montrons que (u_n) converge vers ℓ. Pour tout $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe un terme de la suite qui est strictement plus grand que $\ell - \varepsilon$, i.e. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0}$. Mais comme la suite est croissante et comme l est un majorant de la suite, on a pour tout $n \geq n_0$,

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell\,.$$

Et donc en particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

On a vu que si une suite est convergente, toutes ses sous-suites le sont aussi et convergent vers la même limite. La réciproque est vraie mais peu intéressante du fait que la suite est elle-même une de ses sous-suites. Par contre on peut choisir certaines sous-suites dont l'étude suffit à conclure à la convergence ou à la non convergence de la suite.

Proposition 2.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si ses sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et on la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers ℓ.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_1\,,\ |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon\,,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_2\,,\ |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

On pose $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$. Alors pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

Remarque 2.2. Il en va de même de tout ensemble fini de sous-suites de (u_n) dont les indices couvrent $\mathbb{N}$ ou tout au moins un ensemble $\{n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq n_0\}$. Par exemple (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}).

Définition 2.8 (Suites adjacentes). On appelle suites adjacentes deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

1. (u_n) est croissante,

2. (v_n) est décroissante,

3. $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

4. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 2.8. *Des suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, en effet

$$u_n \leq v_n \leq v_0 \text{ pour tout } n\,.$$

La suite (u_n) est donc convergente et sa limite est $l_1 = \sup\{u_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. De même la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, elle est donc convergente et sa limite est $l_2 = \inf\{v_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que $l_1 = l_2$. Tout d'abord, $l_1 \leq l_2$. En effet, l_1 est le plus petit majorant de la suite (u_n) et pour tout n, v_n est un majorant de la suite (u_n). Donc $l_1 \leq v_n$ pour tout n. Il suit que l_1 est un minorant de la suite (v_n), il est donc plus petit que le plus petit minorant de la suite (v_n) qui est l_2. Donc pour tout n on a

$$u_n \leq l_1 \leq l_2 \leq v_n\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - v_n| \leq \varepsilon$. Alors

$$0 \leq l_2 - l_1 \leq v_{n_0} - u_{n_0} \leq \varepsilon\,.$$

On a donc

$$0 \leq l_2 - l_1 \leq \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0\,,$$

ce qui implique $l_1 = l_2$. □

Un corollaire de ce résultat est le

Théorème 2.2 (des segments emboités). *On considère des intervalles de $\mathbb{R}$ $[a_n, b_n]$ emboités, i.e. tels que $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et dont la longueur tend vers 0. Alors leur intersection est réduite à un seul point.*

2.3 Opérations sur les limites et relations d'ordres

Proposition 2.9 (Somme, produit, quotient). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, l_1 et l_2 leurs limites respectives. Alors :*

- *$(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est $l_1 + l_2$;*
- *$(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est $l_1 l_2$;*
- *si $l_2 \neq 0$, la suite $(u_n/v_n)_{n\geq n_0}$ est définie pour n_0 assez grand, est convergente et sa limite est l_1/l_2.*

Preuve.

- **Somme.** Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ |u_n - l_1| \leq \varepsilon/2\,,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ |v_n - l_2| \leq \varepsilon/2\,.$$

On pose $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$|u_n + v_n - l_1 - l_2| \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2| \leq 2\varepsilon/2\,.$$

- **Produit.** La suite (u_n) étant convergente, elle est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n. On pose aussi $C = \max\{l_2, 1\}$. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ |u_n - l_1| \leq \varepsilon/(2C)\,,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0\,,\ |v_n - l_2| \leq \varepsilon/(2M)\,.$$

  On pose $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$|u_n v_n - l_1 l_2| \leq |u_n(v_n - l_2)| + |(u_n - l_1)l_2| \leq M\varepsilon/(2M) + C\varepsilon/(2C) = \varepsilon\,.$$

- Il suffit de montrer que la suite $(1/v_n)$ est définie pour n assez grand et converge vers $1/l_2$, puis on applique le point précédent. La suite $(|v_n|)$ converge vers $|l_2| > 0$ et d'après la proposition 2.5, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait $|v_n| > |l_2|/4$. La suite $(1/v_n)$ est donc définie pour $n \geq n_1$ et pour tout $n \geq n_1$, $|1/v_n| \leq 4/|l_2|$. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_2\,,\ |v_n - l_2| \leq \varepsilon |l_2|^2/4\,.$$

  On pose $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Alors pour $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l_2}\right| = \left|\frac{l_2 - v_n}{l_2 v_n}\right| \leq \frac{|l_2 - v_n|}{|l_2||v_n|} \leq \frac{4}{|l_2|}\frac{1}{|l_2|}\varepsilon|l_2|^2/4 = \varepsilon\,. \quad \square$$

Proposition 2.10 (Extension à $\bar{\mathbb{R}}$)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant des limites respectives l_1 et l_2 dans $\bar{\mathbb{R}}$. Alors dans tous les cas où $l_1 + l_2$ et $l_1 l_2$ sont définis on a :*

- *$(u_n + v_n)$ tend vers $l_1 + l_2$;*
- *$(u_n v_n)$ tend vers $l_1 l_2$;*
- *si $l_2 = \pm\infty$ et $l_1 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n/v_n)_{n\geq n_0}$ est définie pour n_0 assez grand et converge vers 0.*

Preuve. On laisse comme exercice.

Proposition 2.11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, soit l_1 la limite de (u_n) et l_2 la limite de (v_n).*

1. *Si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n < M$ pour tout n, alors $\ell_1 \leq M$.*
2. *Si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n, alors $\ell_1 \leq M$.*
3. *Si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n > m$ pour tout n, alors $\ell_1 \geq m$.*
4. *Si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout n, alors $\ell_1 \geq m$.*
5. *Si $u_n < v_n$ pour tout n, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.*
6. *Si $u_n \leq v_n$ pour tout n, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.*

A noter que si les hypothèses sont vérifiées pour $n \geq n_0$, les conclusions restent valables.

Preuve. Il suffit de montrer les points *2*, *4* et *6*, les autres en découlent.

2. Supposons que $l_1 > M$, alors pour $\varepsilon = (l_1 - M)/2$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait
$$l_1 - \varepsilon \leq u_n \leq l_1 + \varepsilon\,.$$
Comme
$$l_1 - \varepsilon = l_1 - \frac{l_1 - M}{2} = \frac{l_1 + M}{2} > M\,,$$
il suit que tous les u_n avec $n \geq n_0$ sont strictement supérieurs à M, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4. Démonstration analogue à celle du point *2*.

6. Supposons que $l_1 > l_2$. On pose $\varepsilon = (l_1 - l_2)/3$. Alors
$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_1\,,\ l_1 - \varepsilon \leq u_n \leq l_1 + \varepsilon\,,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_2\,,\ l_2 - \varepsilon \leq v_n \leq l_2 + \varepsilon\,.$$

Alors pour $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a
$$u_n \geq l_1 - \varepsilon > l_2 + \varepsilon \geq v_n$$
ce qui contredit l'hypothèse. □

Théorème 2.3 (de Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, alors elle admet une sous-suite convergente.*

Preuve. Soit m et M dans $\mathbb{R}$, $m < M$, tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout n. On procède par dichotomie. On pose $a_0 = m$, $b_0 = M$, $I_0 = [a_0, b_0]$ et on pose $n_0 = 0$. On considère alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Si elle admet une infinité d'éléments dans l'intervalle $[m, (m+M)/2]$, on prend un $n_1 \geq 1$ tel que $u_{n_1} \in [m, (m+M)/2]$ et on pose $a_1 = m$, $b_1 = (m+M)/2$, $I_1 = [a_1, b_1]$. Sinon, on prend un $n_1 \geq 1$ tel que $u_{n_1} \in [(m+M)/2, M]$ et on pose $a_1 = (m+M)/2$, $b_1 = M$, $I_1 = [a_1, b_1]$. On recommence la procédure indéfiniment pour engendrer une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (u_n) et les intervalles $I_k = [a_k, b_k]$. Les intervalles I_k sont emboités et la longueur de I_k est $(M-m)/2^k$. Autrement dit, les trois suites $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ et $(u_{n_k})_k$ vérifient :

- $a_k \leq u_{n_k} \leq b_k$,
- (a_k) est croissante,
- (b_k) est décroissante,
- $(|b_k - a_k|)$ tend vers 0.

Par le théorème des suites adjacentes et celui des gendarmes, il suit que la suite (u_{n_k}) est convergente. □

Chapitre 3

Fonctions à une variable et dérivation

3.1 Continuité

3.1.1 Continuité en un point

On considère un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, une fonction $f\ :\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in]a,b[$.

Définition 3.1. On dit que

- f admet en x_0 la limite finie $l \in \mathbb{R}$ si
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,;\ \forall x \in]a,b[\,,\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$
et on écrit alors
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l\,;$$
- f tend vers $+\infty$ en x_0 si
$$\forall A > 0\,,\ \exists \eta > 0\,;\ \forall x \in]a,b[\,,\ |x-x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$
et on écrit alors
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\,.$$

On a bien sûr une définition analogue pour
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\,.$$

Définition 3.2. On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f admet une limite finie en x_0 et cette limite vaut $f(x_0)$. C'est-à-dire si et seulement si (voir figure 3.1)
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \eta > 0\,;\ \forall x \in]a,b[\,,\ \ |x-x_0| < \eta \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Définition 3.3. 1. On dit que f est continue à gauche en x_0 si et seulement si f admet une limite finie à gauche en x_0 et cette limite vaut $f(x_0)$. C'est-à-dire si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \eta > 0\,;\ \forall x \in]a,b[\,,\ x_0-\eta < x < x_0 \implies |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

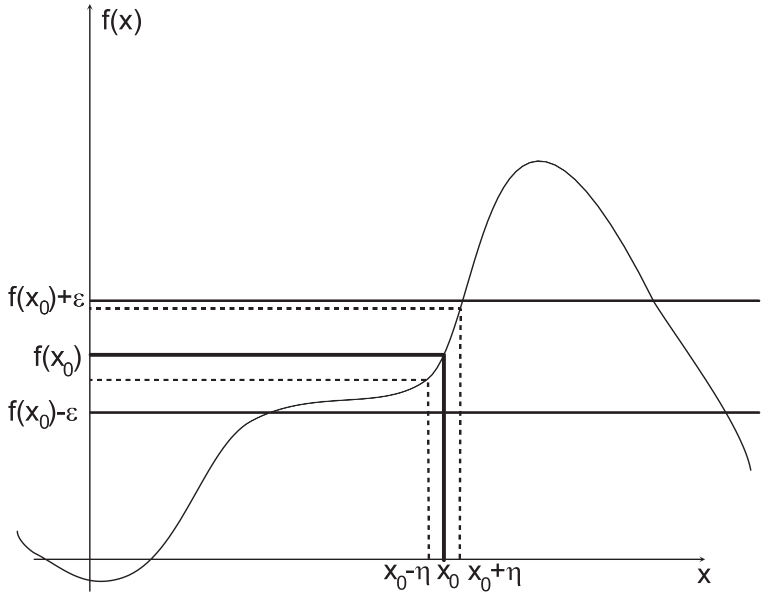

Figure 3.1: Un choix possible de η pour un ε donné. Toutes les valeurs de f sur l'intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ se trouvent dans la bande $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$. f est continue en x_0 si et seulement si, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on peut faire un tel choix de $\eta > 0$.

2. On dit que f est continue à droite en x_0 si et seulement si f admet une limite finie à droite en x_0 et cette limite vaut $f(x_0)$. C'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \eta > 0\,;\ \forall x \in]a, b[\,,\ x_0 < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

C'est la même chose que la continuité, mais on regarde seulement ce qui se passe à gauche (ou à droite) de x_0.

Proposition 3.1. *Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.*

On peut caractériser la continuité en termes de suites.

Théorème 3.1. *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) dans $]a, b[$ qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0$.*

3.1.2 Continuité sur un intervalle

Définition 3.4. 1. Soit $f\ :\ ]a, b[\to \mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On dit que f est continue sur $]a, b[$ si et seulement si elle est continue en chaque point de $]a, b[$ (i.e. $\forall x \in]a, b[$, f est continue en x).

2. Soit $f\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. On dit que f est continue sur $[a, b]$ si et seulement si f est continue en tout point de $]a, b[$, f est continue à droite en a et f est continue à gauche en b.

3. Soit $f\ :\ [a, b[\to \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On dit que f est continue sur $[a, b[$ si et seulement si f est continue en tout point de $]a, b[$ et f est continue à droite en a.

4. Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, avec $-\infty \le a < b < +\infty$. On dit que f est continue sur $]a,b]$ si et seulement si f est continue en tout point de $]a,b[$ et f est continue à gauche en b.

Théorème 3.2 (théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, alors toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes. En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont non nulles et de signes opposés (i.e. si $f(a) \times f(b) < 0$) alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Preuve (par dichotomie). Si $f(a) = f(b)$, on n'a rien à démontrer. On suppose donc que $f(a) \neq f(b)$. Prenons le cas $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$ se traitera de façon similaire). Soit $y \in]f(a), f(b)[$. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. On considère $c = (a_0 + b_0)/2$. Si $f(c) = y$, c'est terminé. Si $f(c) < y$, on pose $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$. Si $f(c) > y$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c$. On reproduit ainsi cette procédure sur l'intervalle $[a_1, b_1]$. La procédure s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations si on tombe sur un intervalle tel que la valeur de f en son milieu soit y, auquel cas on a trouvé un point où f prend la valeur y. Si la procédure se poursuit indéfiniment, on engendre deux suites : (a_n) croissante, (b_n) décroissante, telles que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty\,.$$

Ce sont des suites adjacentes, elles convergent donc vers la même limite d qui est dans l'intervalle $[a,b]$. Et comme on a par construction

$$f(a_n) < y < f(b_n)\,,$$

il suit par continuité de f que

$$f(d) \le y \le f(d)\,.$$

Donc $f(d) = y$ (ce qui implique en particulier que $d \neq a$ et $d \neq b$) et le théorème est démontré. □

Remarque 3.1. De manière générale, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Cependant, c'est seulement dans le cas où l'intervalle de départ est fermé borné que l'on sait préciser la nature de l'intervalle image.

Théorème 3.3. *L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné éventuellement réduit à un seul point.*

Preuve. On note

$$f([a,b]) = \{f(x)\,;\ x \in [a,b]\}\,.$$

Le fait que $f([a,b])$ soit un intervalle est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. Maintenant, $f([a,b])$ est fermé par continuité de f et par le théorème de Bolzano-Weierstrass. En effet, soit (v_n) une suite dans $f([a,b])$ qui converge dans $\mathbb{R}$. On peut trouver une suite (u_n) dans $[a,b]$ telle que $f(u_n) = v_n$. La suite (u_n) étant dans $[a,b]$, elle est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite (u_{n_k}) convergente. Soit l sa limite. Par continuité de f on a

$$f(u_{n_k}) = v_{n_k} \to f(l) \in f([a,b])$$

et comme (v_n) converge dans $\mathbb{R}$ toutes ses sous-suites convergent vers la même limite que (v_n). Il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = f(l) \in f([a,b])\,.$$

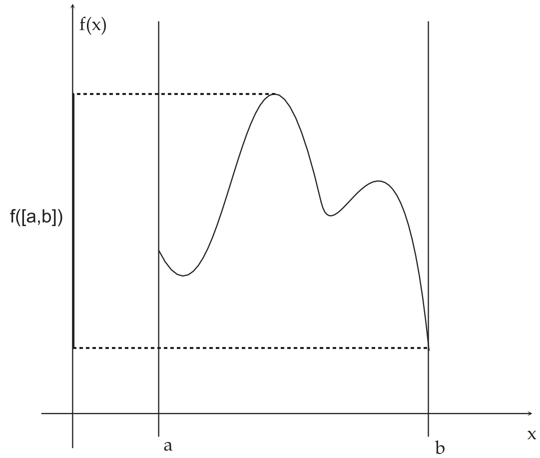

Figure 3.2: Un cas où $f([a,b]) \neq [f(a), f(b)]$.

Donc $f([a,b])$ est fermé. Reste à voir que $f([a,b])$ est borné. Supposons que $f([a,b])$ ne soit pas borné, alors il existe une suite (v_n) dans $f([a,b])$ qui tend vers l'infini. On peut trouver une suite (u_n) dans $[a,b]$ telle que $f(u_n) = v_n$. La suite (u_n) étant dans $[a,b]$, elle est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite (u_{n_k}) convergente. Soit l sa limite. On a alors une suite (u_{n_k}) qui tend vers $l \in [a,b]$ et telle que $(f(u_{n_k}))$ diverge. Ceci contredit la continuité de f en l. Donc $f([a,b])$ est borné et le théorème est démontré. □

Attention! Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ par f, notée $f([a,b])$, n'est pas nécessairement l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (voir figure 3.2).

Le théorème précédent signifie que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, alors f possède sur $[a,b]$ un minimum m et un maximum M et de plus, toutes les valeurs dans $[m,M]$ sont atteintes, i.e.

$$\forall y \in [m,M]\,,\ \exists x \in [a,b]\,;\ f(x) = y\,.$$

3.2 Dérivabilité

Remarque 3.2. Dorénavant, tous les intervalles seront supposés de longueur > 0, i.e. non vides et non réduits à un point.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et x_0 un point intérieur à I (i.e. $\exists \eta > 0$ t.q. $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset I$, autement dit, x_0 n'est pas un bord de I).

Définition 3.5. On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité (définie sur $I \setminus \{x_0\}$ qui désigne I privé du point x_0)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

Une façon équivalente d'exprimer cette définition est de dire que la quantité (définie pour h au voisinage de 0, $h \neq 0$)

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

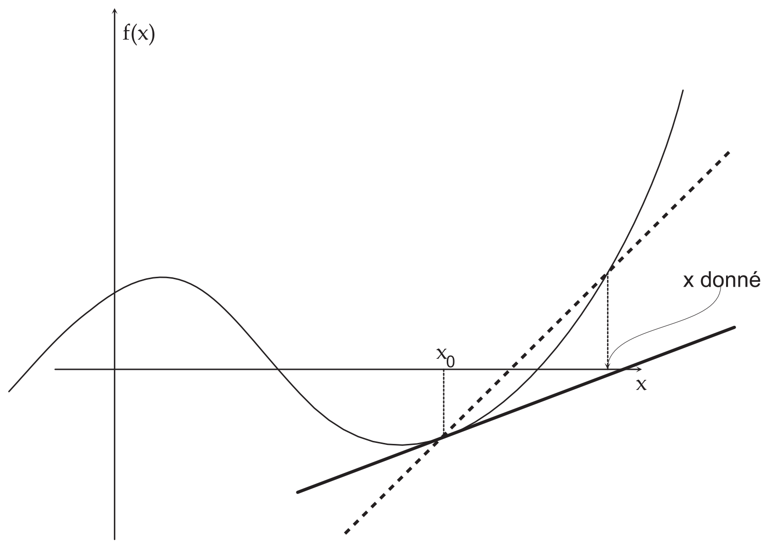

Figure 3.3: Illustration graphique de la notion de nombre dérivé. La droite épaisse en pointillés joint les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$. Sa pente est $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. La limite de ces droites lorsque x tend vers x_0 est la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ (droite épaisse en trait plein). Sa pente est $f'(x_0)$ d'après la définition 3.5.

Cette limite, lorsqu'elle existe, s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et on note

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

L'illustration graphique de cette définition (figure 3.3) montre que $f'(x_0)$ est en fait la vitesse de croissance (autrement dit la pente) de la courbe $y = f(x)$ au point x_0.

Définition 3.6. On dira que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 si et seulement si

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en x_0. Cela revient à dire que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en 0.

Si ces limites existent, on les appellera respectivement dérivée à gauche et dérivée à droite de f en x_0 et on notera

$$\begin{aligned} f'_g(x_0) &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \\ f'_d(x_0) &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Le résultat suivant est immédiat mais important.

Proposition 3.2. *f est dérivable en x_0 si et seulement si : f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

On sait de façon générale qu'une fonction d'une variable admet une limite en un point si et seulement si elle admet en ce point une limite à gauche et une limite à droite et ces deux limites sont égales. La proposition ci-dessus est l'expression de cette propriété pour la fonction de x :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Remarque 3.3. Exemple typique d'une fonction dérivable à gauche et à droite en un point mais non dérivable en ce point : $f(x) = |x|$. On voit sur un dessin que f est dérivable à gauche et à droite en 0 et que $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

Proposition 3.3. *Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0 (la réciproque est fausse : cf. $|x|$).*

Preuve. Pour $x \neq x_0$, on a :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) .$$

Lorsque $x \to x_0$, nous avons

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow f'(x_0) \text{ et } x - x_0 \longrightarrow 0 ,$$

donc le produit de ces deux fonctions tend vers le produit des limites, c'est-à-dire 0. On en déduit donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

c'est-à-dire que f est continue en x_0. □

Remarque 3.4. De même nous avons

- f dérivable à gauche en $x_0 \implies f$ continue à gauche en x_0,
- f dérivable à droite en $x_0 \implies f$ continue à droite en x_0.

Définition 3.7 (Dérivabilité sur un intervalle).

1. $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, est dérivable sur $]a, b[$ si et seulement si elle est dérivable en chaque point de $]a, b[$.
2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < +\infty$, est dérivable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est dérivable en chaque point de $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.
3. $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, est dérivable sur $[a, b[$ si et seulement si elle est dérivable en chaque point de $]a, b[$ et dérivable à droite en a.
4. $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a < b < +\infty$, est dérivable sur $]a, b]$ si et seulement si elle est dérivable en chaque point de $]a, b[$ et dérivable à gauche en b.

Définition 3.8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. On appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' définie sur I et qui à tout point $x \in I$ associe $f'(x)$ le nombre dérivé de f en x.

A noter que si I est de la forme $[a,b]$ ou $[a,b[$, on donnera à f' la valeur $f'_d(a)$ au point a.

De même, si I est de la forme $[a,b]$ ou $]a,b]$, on définira la valeur de f' au point b comme étant $f'_g(b)$.

La fonction f' sera également notée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Proposition 3.4 (Opérations sur les fonctions dérivables)**.** *1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$, soit deux applications $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

a. Si f et g sont dérivables en x_0, alors

- *$\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et*
$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)\,.$$
- *fg est dérivable en x_0 et*
$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\,.$$
- *Si f ne s'annule pas en x_0, alors $1/f$ est définie au voisinage de x_0, dérivable en x_0 et*
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}\,.$$
- *Une conséquence immédiate des deux points précédents est que si $g(x_0)$ est non nulle, alors f/g définie au voisinage de x_0, dérivable en x_0 et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,.$$

b. Si f et g sont dérivables sur I, alors

- *$\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et*
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'\,.$$
- *fg est dérivable sur I et*
$$(fg)' = fg' + f'g\,.$$
- *Si f ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ est définie et dérivable sur I et*
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}\,.$$
- *Si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est définie et dérivable sur I et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,.$$

A noter que lorsque x_0 est un bord de I dans le a., les dérivées s'entendent comme des dérivées à gauche ou à droite. b. est une conséquence directe de a.

2. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$.

a. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors

- *$g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)\,.$$

- *Si $f : I \to J$ est bijective et si $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque de la fonction f*

$$f^{-1} \,:\, J \to I$$

est dérivable en $f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

b. Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J, alors

- *$g \circ f$ est dérivable sur I et*

$$(g \circ f)' = \left(g' \circ f\right) f'\,.$$

- *Si $f : I \to J$ est bijective et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et*

$$\left(f^{-1}\right)' \circ f = \frac{1}{f'} \text{ (fonction de } I \text{ dans } \mathbb{R})\,,$$

c'est-à-dire

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \text{ (fonction de } J \text{ dans } \mathbb{R})\,.$$

Si x_0 est un bord de I ou y_0 est un bord de J dans le a., les dérivées en ces points sont des dérivées à droite ou à gauche. a. implique naturellement b.

Quelques démonstrations.

1.a.2ème point. On écrit

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = f(x)\left(g(x) - g(x_0)\right) + g(x_0)\left(f(x) - f(x_0)\right)\,.$$

D'où

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= f(x_0)\,, \\ \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= g'(x_0)\,, \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0)\,, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\,.$$

□

1.a.3ème point. On a $f(x_0) \neq 0$, de plus f est dérivable en x_0, donc continue en x_0, c'est-à-dire $f(x) \to f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$. On en déduit donc :

$$\exists \eta > 0\,;\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\,,\ f(x) \neq 0\,.$$

La fonction $1/f$ est donc bien définie dans $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ et dans ce voisinage de x_0, on peut considérer

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{f(x_0)f(x)} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}\,. \tag{3.1}$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} &= \frac{1}{(f(x_0))^2}\,, \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} &= -f'(x_0)\,, \end{aligned}$$

d'où (3.1) a une limite en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}\,.$$

□

1.a.4ème point. On écrit simplement

$$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$$

et on applique les deux points précédents. □

2.a.2ème point. On considère $y \in J$, $y \neq y_0$. Soit $x \in I$ l'unique antécédent de y, i.e. $y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(y_0)}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \text{ lorsque } x \to x_0\,. \end{aligned}$$

□

A noter que si on a oublié la formule de $\left(f^{-1}\right)'$, on peut facilement la retrouver de la façon suivante : on écrit simplement que f^{-1} est la fonction réciproque de f, c'est-à-dire

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}\,,\ \text{i.e. } \forall x \in I\,,\ f^{-1}(f(x)) = x\,.$$

On dérive les deux membres de l'égalité ci-dessus au point x_0

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \times f'(x_0) = 1 \text{ (dérivée de } x \mapsto x \text{ en } x_0).$$

Il suit

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{si } f'(x_0) \neq 0\,.$$

Quelques exemples.

1. Dérivée de $\sqrt{x}$. La fonction
$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
est bijective et sa dérivée $f'(x) = 2x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa fonction réciproque est :
$$f^{-1}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$
Sa dérivée est donnée par :
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$
et en posant $y = f(x)$, on trouve
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,.$$

2. Dérivée de la fonction $\ln(x)$. La fonction
$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$
est bijective et sa dérivée $f' = f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est :
$$f^{-1}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$
Comme précédemment
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
c'est-à-dire
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{x}\,.$$

On introduit maintenant une notion naturelle : celle des dérivées successives.

Définition 3.9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si la fonction $f'\ :\ I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0, on notera $f''(x_0)$ son nombre dérivé en x_0 au lieu de $(f')'(x_0)$ et on dira que f admet une dérivée seconde en x_0. De même, si f' est dérivable sur I, on notera f'' sa fonction dérivée et on l'appellera la dérivée seconde de f sur I. Lorsque f'' existe sur I, si elle est dérivable en x_0 ou sur I, on note $f'''(x_0)$ sa dérivée en x_0, f''' sa dérivée sur I et on parle de dérivée troisième de f en x_0 ou sur I. Par récurrence, on peut ainsi définir une infinité de dérivées successives, pourvu que chaque dérivée soit elle-même dérivable sur I. On notera $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f si elle existe. En particulier, on a $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$.

Un exemple de fonction admettant une infinité de dérivées successives sur $\mathbb{R}$ est $f(x) = x^2$. On a $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(n)} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ pour $n \geq 3$.

Proposition 3.5 (Formule de Leibnitz)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, n fois dérivables sur I, où $n \in \mathbb{N}$. Alors le produit fg est n fois dérivable sur I et la dérivée d'ordre n (aussi appelée dérivée n-ième) de fg est donnée par la formule*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} .$$

A noter que sous les hypothèses de la proposition, on a également pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques que $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)} .$$

Preuve de la proposition. On utilise simplement la formule pour la dérivée d'un produit et on raisonne par récurrence. On a

$$(fg)' = fg' + f'g$$

qui est la formule de Leibnitz pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang n, on la dérive une fois de plus :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f^{(k)} (C_n^{k-1} g^{(n-k+1)} + C_n^k g^{(n-k+1)}) + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} . \quad \square
\end{aligned}$$

3.3 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Proposition 3.6 (Extremum d'une fonction dérivable)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f présente un extremum local en x_0, c'est-à-dire*

- *ou bien f admet un maximum local en x_0, ce qui signifie*

$$\exists \eta > 0 \, ; \; \forall x \in I \, , \; 0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) \leq f(x_0) \, ,$$

- *ou bien f admet un minimum local en x_0, ce qui signifie*

$$\exists \eta > 0 \, ; \; \forall x \in I \, , \; 0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) \geq f(x_0) \, .$$

Si de plus f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve dans le cas d'un maximum. Pour $x < x_0$, $x \in I$, si x est assez proche de x_0, on a $f(x) \leq f(x_0)$, d'où

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \, .$$

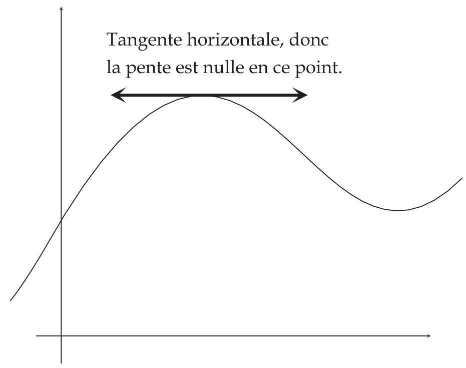

Figure 3.4: Illustration de la proposition 3.6 dans le cas d'un maximum.

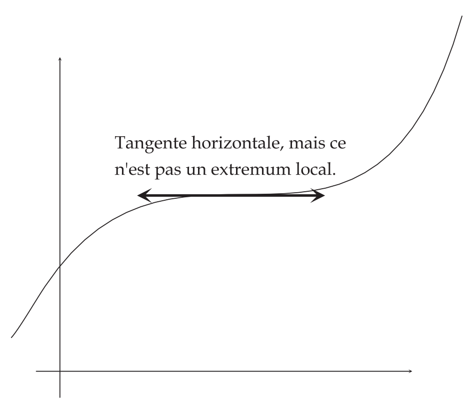

Figure 3.5: Contre-exemple de la réciproque de la proposition 3.6.

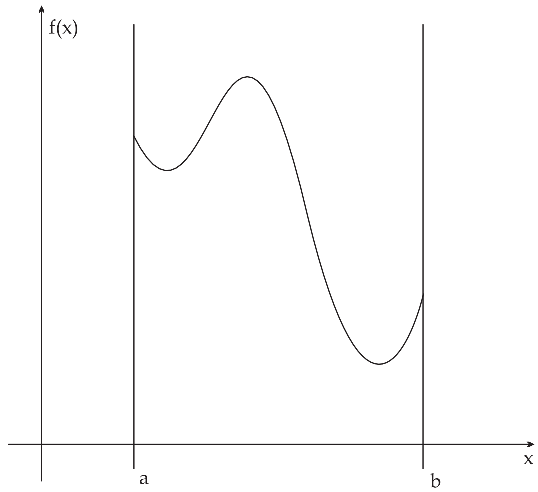

Figure 3.6: La fonction admet un extremum local en a mais $f'_d(a) \neq 0$. De même f admet un extremum local en b mais $f'_g(b) \neq 0$.

De même, pour $x > x_0$, $x \in I$, si x est assez proche de x_0, on a $f(x) \leq f(x_0)$, d'où

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,.$$

Et comme $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$, on a forcément $f'(x_0) = 0$. □

Attention! Si f admet un extremum local au bord de l'intervalle, la proposition ne s'applique plus (voir figure 3.6). D'autre part, une fonction peut admettre un extremum local en un point sans y être dérivable. Exemple : la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = |x|$. Elle admet un minimum local (et même global) en 0 et elle n'est pas dérivable en 0.

Théorème 3.4 (Théorème de Rolle)**.** *Soit la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. On suppose f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. On a vu dans le théorème 3.3 que l'image par f de $[a, b]$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$, $m \leq M$. Si $m = M = f(a) = f(b)$, alors f est constante sur $[a, b]$ et donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Dans le cas contraire, au moins l'un des deux nombres m ou M est distinct de $f(a) = f(b)$; ceci se décompose en deux cas :

- $m \neq f(a) = f(b)$, i.e. $m < f(a)$ car $f(a) \in [m, M]$. Alors f atteint la valeur m dans $]a, b[$ car $f(a) \neq m$ et $f(b) \neq m$. Soit $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$. Alors f admet son minimum global (et donc un minimum local) en c et d'après la proposition 3.6, on a $f'(c) = 0$.

- $M \neq f(a) = f(b)$, alors $M > f(a) = f(b)$ et il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. La fonction f admet alors son maximum global (et donc un maximum local) en c et d'après la proposition 3.6, on a $f'(c) = 0$. □

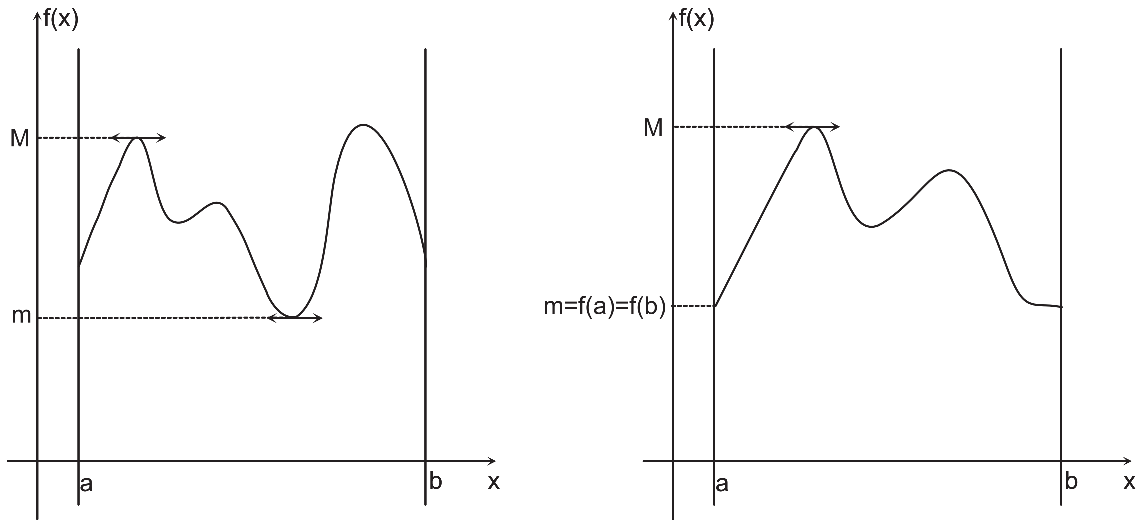

Figure 3.7: Deux illustrations du théorème de Rolle.

Théorème 3.5 (Egalité des accroissements finis ou théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Démonstration immédiate : on applique le théorème de Rolle à la fonction

$$g(x) = f(x) - (x-a)\,\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \quad \square$$

3.4 Conséquences du théorème des accroissements finis

3.4.1 Inégalité des accroissements finis

Il s'agit d'un autre théorème que l'on appelle aussi fréquemment "théorème des accroissements finis". Son avantage par rapport à l'égalité des accroissements finis est sa plus grande généralité. Il reste valable naturellement pour des fonctions à plusieurs variables (même si sa démonstration change sensiblement) alors que l'égalité des accroissements finis perd son sens dans ce cadre.

Théorème 3.6 (Inégalité des accroissements finis)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \le (b-a) \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|\,.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de l'égalité des accroissements finis. $\square$

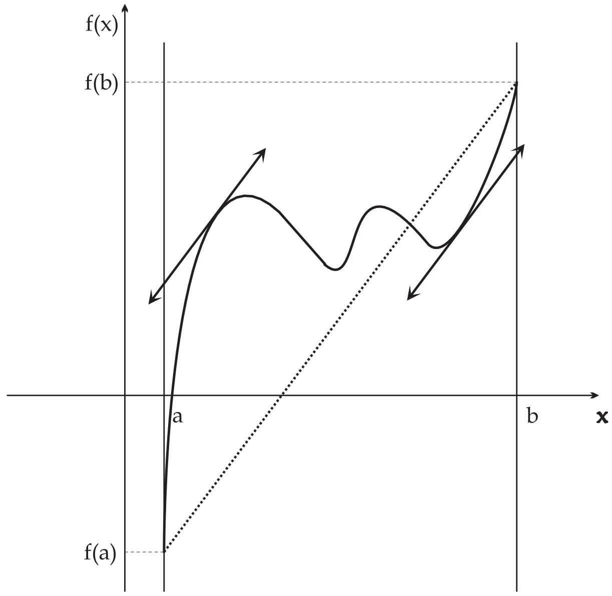

Figure 3.8: Une illustration du théorème des accroissements finis. Le théorème dit qu'il existe un point intérieur à $]a, b[$ en lequel la tangente au graphe de f est parallèle à la droite joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Ici, il y en a quatre. On a représenté les deux correspondant au maximum et au minimum de g définie dans la démonstration.

3.4.2 Condition suffisante de dérivabilité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I.

Théorème 3.7. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que f', définie sur $I \setminus \{x_0\}$, admet une limite finie l en x_0. Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. Il suit donc également que f' est continue en x_0.*

Preuve. D'après le théorème des accroissements finis, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $\exists c_x$ strictement compris entre x et x_0 tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Lorsque $x \to x_0$, on a $c_x \to x_0$ et donc par hypothèse $f'(c_x) \to l$. Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. □

3.4.3 Sens de variation d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

Proposition 3.7.
1. *f est croissante sur I (au sens large) si et seulement si $f' \geq 0$ sur I, i.e. $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$.*
2. *f est décroissante sur I (au sens large) si et seulement si $f' \leq 0$ sur I.*
3. *f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur I (c'est une conséquence directe de 1. et 2. car f est constante si et seulement si f est croissante et décroissante).*

4. *Si $f' \geq 0$ sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I, alors f est strictement croissante sur I.*

5. *Si $f' \leq 0$ sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I, alors f est strictement décroissante sur I.*

Corollaire 3.1 (Condition suffisante d'extremum local)**.** *Soit x_0 un point intérieur à I, on suppose que $f'(x_0) = 0$.*

- *S'il existe $\eta > 0$ tel que $f' < 0$ sur $]x_0 - \eta, x_0[$ et $f' > 0$ sur $]x_0, x_0 + \eta[$, alors f admet un minimum local strict en x_0.*

- *S'il existe $\eta > 0$ tel que $f' > 0$ sur $]x_0 - \eta, x_0[$ et $f' < 0$ sur $]x_0, x_0 + \eta[$, alors f admet un maximum local strict en x_0.*

Preuve du *1.* **de la proposition 3.7.** Supposons f croissante sur I. Alors pour tout $x_0 \in I$, on a

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}\,, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ et donc } f'(x_0) \geq 0\,,$$

(on rappelle que si x_0 est un point du bord, $f'(x_0)$ représente une dérivée à gauche ou à droite en x_0). Réciproquement, si $f' \geq 0$ sur I, soit $x, y \in I$ tels que $x < y$, alors par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in]x, y[\,;\ f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,.$$

Comme $f' \geq 0$ sur I, on a $f'(c) \geq 0$ et donc $f(y) \geq f(x)$. C'est-à-dire que pour tout $x, y \in I$, si $x < y$ alors $f(x) \leq f(y)$. Autrement dit f est croissante sur I. □

3.5 Formules de Taylor

Définition 3.10. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dira que $f \in \mathcal{C}^n(I)$, pour un $n \in \mathbb{N}$, si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On dira aussi que f est n fois continûment dérivable sur I, ou que f est $\mathcal{C}^n$ sur I, ou de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. On dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La classe $\mathcal{C}^0$ correspond simplement aux fonctions continues sur I.

Proposition 3.8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. **Formule de Taylor avec reste intégral.** *On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th)\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th)\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Le polynôme en h :

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

s'appelle le polynôme de Taylor d'ordre n de f en x_0. Remarquons que pour $n = 0$, la formule de Taylor avec reste intégral se réduit à

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \int_0^1 f'(x_0 + th)\,\mathrm{d}t$$

et en posant $x = x_0 + th$, $\mathrm{d}x = h\mathrm{d}t$, on se ramène au résultat bien connu :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(x)\mathrm{d}x\,.$$

2. **Formule de Taylor-Lagrange.** *On peut l'écrire comme une généralisation du théorème des accroissements finis. Soit a et b deux points distincts dans I, on suppose que $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(]a,b[)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\,.$$

On peut aussi l'écrire dans l'esprit d'une étude locale au voisinage de x_0. On suppose $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \setminus \{x_0\})$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, $h \neq 0$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)\,.$$

3. **Formule de Taylor-Young.** *On suppose que $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et que f admet une dérivée $(n+1)$-ième en x_0. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + h^{n+1}\varepsilon(h)\,, \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0\,.$$

A noter que dans ce cas, le polynôme de Taylor est d'ordre $n+1$, au lieu de n pour les autres formules.

Remarque 3.5. Bien entendu, lorsque $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, les trois formules peuvent être appliquées.

Preuve de la proposition.

1. On commence par ré-écrire le reste intégral sous une forme qui facilitera la démonstration. On fait le changement de variable $s = x_0 + th$: on obtient

$$\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0 + h - s)^n f^{(n+1)}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

En posant $x = x_0 + h$, la formule devient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

La formule se vérifie par récurrence sur n. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, x]$, le théorème fondamental de l'analyse affirme

$$f(x) = f(a) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t\,,$$

c'est la formule pour $n = 0$.

Si la formule est vraie pour n et si f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[x_0, x]$, par intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} \\ &\quad - \int_{x_0}^{x} -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\,,$$

ce qui implique

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\,.$$

O, en déduit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

ce qui est précisément la formule pour $n + 1$. □

Propriété (Développement de Taylor d'un polynôme). Soit P un polynôme de degré n sur $\mathbb{R}$, alors pour $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, P est égal à son polynôme de Taylor d'ordre n en x_0, i.e.

$$P(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(x_0) \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

et en particulier

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} P^{(k)}(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Démonstration immédiate. P est un polynôme de degré n sur $\mathbb{R}$, donc $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et

$$P^{(k)} \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ pour } k \geq n + 1.$$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à P pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$:

$$P(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n\, P^{(n+1)}(x_0 + th)\,\mathrm{d}t$$

et comme $P^{(n+1)} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, le reste intégral est nul. □

3.6 Comparaison de fonctions

3.6.1 Au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

On considère $\mathcal{D}$ un ensemble de la forme

$$\mathcal{D} =]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}\,,\ \ \alpha > 0\,,$$

c'est-à-dire un voisinage de a duquel le point a est enlevé. On considère deux fonctions $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Cela signifie que f et g sont définies près de a mais peuvent ne pas être définies en a.

Définition 3.11.

1. On dira que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe $\eta > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \ \text{ pour tout } x \in \mathcal{D} \text{ tel que } 0 < |x-a| < \eta.$$

On écrit $f = O(g)$ au voisinage de a. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, ceci est équivalent au fait que f/g soit bornée au voisinage de a.

2. On dira que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x)\ \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0\,.$$

On écrit $f = o(g)$ au voisinage de a. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, ceci est équivalent à

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

3. On dira que f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = (1+\varepsilon(x))\,g(x)\ \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0\,.$$

On écrit $f \simeq g$ au voisinage de a. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, ceci est équivalent à

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Exemples :

1. $x^2 \sin(1/x) = O(x^2)$ au voisinage de 0. C'est évident car

$$\left|x^2 \sin(1/x)\right| \leq x^2\ \forall x \neq 0\,.$$

On est dans le cas où f/g n'a pas de limite en 0, en effet

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

2. $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0 car

$$\frac{x^3}{x^2} = x \to 0 \text{ lorsque } x \to 0\,.$$

3. $1/x^2 = o(1/x^3)$ au voisinage de 0 car

$$\frac{1/x^2}{1/x^3} = x \to 0 \text{ lorsque } x \to 0\,.$$

4. $x^3 + 2x^2 + 4 \simeq 4$ au voisinage de 0 car

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 4}{4} = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + 1 \to 1 \text{ lorsque } x \to 0\,.$$

5. $x^2 \sin(1/x) = O(x)$ au voisinage de 0 car

$$\left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right| \leq |x| \text{ pour } x \neq 0\,,$$

qui est bien borné au voisinage de 0. On a de plus

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0\,,$$

c'est-à-dire $x^2 \sin(1/x) = o(x)$ au voisinage de 0.

Proposition 3.9. *1. Si la fonction f/g admet une limite finie en a, alors $f = O(g)$ au voisinage de a. La réciproque est fausse (voir premier exemple ci-dessus).*

2. *$f = o(g)$ au voisinage de $a \implies f = O(g)$ au voisinage de a.*

3. *$f \simeq g$ au voisinage de $a \implies f = O(g)$ au voisinage de a.*

4. *On suppose que $f = O(g)$ au voisinage de a, alors on a les implications suivantes (les réciproques sont fausses) :*

   - *Si g est bornée au voisinage de a, alors f est bornée au voisinage de a. A noter que f et g n'étant pas a priori définies en a, g bornée au voisinage de a signifie :*

   $$\exists \eta > 0\,,\ \exists C > 0\,;\ \forall x \in \mathcal{D}\,,\ 0 < |x - a| < \eta \implies |g(x)| \leq C\,.$$

   - *Si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.*

5. *On suppose $f = o(g)$ au voisinage de a et g bornée au voisinage de a, alors $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.*

6. *La relation $f \simeq g$ au voisinage de a est une relation d'équivalence, i.e. elle est réflexive, symétrique et transitive.*

7. *On suppose $f \simeq g$ au voisinage de a. Si g admet une limite finie ou infinie en a, alors f admet une limite en a et $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$.*

Cette proposition montre que la comparaison avec d'autres fonctions est un outil important pour connaître le comportement d'une fonction au voisinage d'un point.

Démonstration. La preuve de chacun des quatre points est à peu près immédiate. On en traite deux :

4. 2ème point. $f = O(g)$ au voisinage de a signifie qu'il existe $C > 0$ telle que pour $x \in \mathcal{D}$ assez proche de a, on ait $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Donc lorsque x tend vers a, $|f(x)|$ est comprise entre 0 et $C|g(x)|$ qui tend vers 0. D'où, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

7. $f \simeq g$ au voisinage de a signifie que, pour $x \in \mathcal{D}$,

$$f(x) = (1 + \varepsilon(x))\, g(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0\,.$$

Soit $l = \lim_{x\to a} g(x)$, l pouvant être finie ou infinie. Comme $1 + \varepsilon(x) \to 1$ lorsque $x \to a$, on en déduit que $f(x) = (1 + \varepsilon(x))\, g(x) \to l$ lorsque $x \to a$. C'est-à-dire : f admet une limite en a et cette limite est l.

3.6.2 Au voisinage de $+\infty$

On considère un ensemble $\mathcal{D}$ de la forme $\mathcal{D} =]A, +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$, et deux fonctions $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

Définition 3.12. 1. $f = O(g)$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe $B \geq A$ et $C > 0$ tels que

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ pour } x > B.$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, ceci est équivalent au fait que f/g soit bornée au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire au fait qu'il existe $B \geq A$ et $C > 0$ tels que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C \text{ pour } x > B.$$

2. $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x)\ \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0\,.$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, ceci est équivalent à

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

3. $f \simeq g$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = (1 + \varepsilon(x))\, g(x)\ \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0\,.$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, ceci est équivalent à

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Nous énonçons maintenant des propriétés analogues au cas de la comparaison au voisinage de a :

Proposition 3.10. *1. Si f/g admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$, alors $f = O(g)$ au voisinage de $+\infty$. La réciproque est fausse.*

2. $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty \implies f = O(g)$ au voisinage de $+\infty$.

3. $f \simeq g$ *au voisinage de* $+\infty \implies f = O(g)$ *au voisinage de* $+\infty$.

4. On suppose $f = O(g)$ *au voisinage de* $+\infty$. *Alors*

- g *bornée au voisinage de* $+\infty \implies f$ *bornée au voisinage de* $+\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. On suppose $f = o(g)$ *au voisinage de* $+\infty$. *Alors* g *bornée au voisinage de* $+\infty$ *implique* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6. $\simeq$ *est une relation d'équivalence, i.e. :*

- $f \simeq f$ *toujours vrai,*
- $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$,
- $f \simeq g$ *et* $g \simeq h \implies f \simeq h$.

7. On suppose $f \simeq g$ *au voisinage de* $+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$, l *pouvant être finie ou infinie. Alors,* f *admet une limite lorsque* $x \to +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Remarque 3.6. On a les mêmes définitions et propriétés pour la comparaison de fonctions au voisinage de $-\infty$.

Exemples :

1. $\sin x = O(x)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ car $|\sin x| \leq |x|$ pour tout x. On a même mieux :
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$
et donc $\sin x = o(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2. $x^\alpha = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, par le résultat classique
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0\,.$$

3. $e^x = o(x^k)$ au voisinage de $-\infty$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, par le même résultat classique. En effet, en posant $u = -x$,
$$\lim_{x\to-\infty} x^k e^x = \lim_{u\to+\infty} (-1)^k u^k e^{-u} = 0\,.$$

3.7 Développements limités

3.7.1 Définitions et propriétés

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

Définition 3.13. f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 s'il existe des nombres réels a_0, a_1, ..., a_n et une fonction ε définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout h voisin de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on ait
$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + h^n \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0\,.$$

Le polynôme

$$P(h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k$$

s'appelle la partie régulière du développement limité. Une façon équivalente d'écrire la relation précédente est :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) \text{ au voisinage de } h = 0\,.$$

Proposition 3.11 (Unicité du développement limité)**.** *Les coefficients a_0, a_1, ..., a_n du développement limité à l'ordre n de f en x_0 sont uniques, c'est-à-dire : s'il existe des coefficients a_0, a_1, ..., a_n et b_0, b_1, ..., b_n tels que*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) \text{ au voisinage de } h = 0$$

et

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + o(h^n) \text{ au voisinage de } h = 0\,,$$

alors $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

Preuve.

Corollaire 3.2. *Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et admet en x_0 une dérivée d'ordre $n+1$, alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0 et il est donné par la formule de Taylor-Young :*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + h^{n+1}\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0\,.$$

Il faut comprendre ce corollaire de la façon suivante : la formule de Taylor-Young donne l'existence d'un développement limité de f à l'ordre $n+1$ en x_0 et la proposition 3.11 dit que c'est **le** développement limité de f à l'ordre $n+1$ en x_0.

Corollaire 3.3. *On se place dans le cas $x_0 = 0$ et on suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\,.$$

1. *Si f est paire, alors $a_k = 0$ pour tout k impair dans $\{0, 1, ..., n\}$, i.e. la partie régulière du développement limité ne contient que des puissances paires de x.*

2. *Si f est impaire, alors $a_k = 0$ pour tout k pair dans $\{0, 1, ..., n\}$, i.e. la partie régulière du développement limité ne contient que des puissances impaires de x.*

Remarque 3.7. 1. Si x_0 n'est pas un point intérieur à I mais un bord de I, par exemple

(i) $I = [a, b]$ et $x_0 = a$,

(ii) ou encore $I =]a, b]$ et $x_0 = b$,

on peut parler de développement limité à droite (pour le cas *(i)*) ou à gauche (pour le cas *(ii)*) en x_0.

2. On peut effectuer des développements limités au voisinage de l'infini. On considère une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$), c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]B,+\infty[$, $B > 0$ (resp. $]-\infty, A[$, $A < 0$). On définit une fonction g à partir de f par $g(x) = f(1/x)$. La fonction g est définie sur un intervalle de la forme $]0, b[$, $b = 1/B > 0$ (resp. $]a, 0[$, $a = 1/A < 0$). Un développement limité de g à l'ordre n à droite (resp. à gauche) en 0, s'il existe, donnera un développement limité de f à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$). Plus précisément, si on a pour g :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \text{ au voisinage de 0 à droite (resp. à gauche)}\,,$$

on en déduit pour f :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ au voisinage de } +\infty \text{ (resp. au voisinage de } -\infty)\,.$$

3.7.2 Développements limité en 0 des fonctions élémentaires

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x)\,,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)\,,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)\,,$$

$$\text{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\,,$$

$$\text{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\,,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\,,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\,,$$

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n}\right) + x^n\varepsilon(x)\,,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)\,.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque,

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+... \\ &\quad ...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)\,,\end{aligned}$$

d'où pour $\alpha = 1/2$,

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+...+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times 5\times ...\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times ...\times(2n)}x^n+x^n\varepsilon(x)\,,$$

et pour $\alpha = -1/2$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-...+(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times ...\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times ...\times(2n)}x^n+x^n\varepsilon(x)\,.$$

Exemple de développement limité à droite ou à gauche en 0 : soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|}\,.$$

Pour $x \geq 0$, on a

$$f(x)=\frac{1}{1+x}\,;$$

donc f admet un développement limité à l'ordre n à droite en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il est donné par :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,x^k+o(x^n)\text{ pour }x\geq 0\text{ et voisin de }0\,.$$

Pour $x \leq 0$, on a

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\,;$$

donc f admet un développement limité à l'ordre n à gauche en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il est donné par :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)\text{ pour }x\leq 0\text{ et voisin de }0\,.$$

Comme les parties régulières de ces deux développements ne sont pas les mêmes pour $n \geq 1$, on en déduit que f n'admet pas de développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en 0.

Exemple de développement limité au voisinage de $+\infty$: soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\,.$$

La fonction g définie par $g(x) = f(1/x)$ est définie sur $]0, 1[$ et vaut $g(x) = 1/(1-x)$. La fonction g admet un développement limité à l'ordre n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)\,.$$

Donc f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ pour tout entier naturel n, donné par

$$f(x)=1+\frac{1}{x}+...+\frac{1}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)\,.$$

3.7.3 Opérations sur les développements limités

Somme, produit et quotient

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, admettant en x_0 un développement limité à l'ordre n :

$$\begin{aligned} f(x_0+h) = P(h) + o(h^n) \quad &, \quad P(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n\,, \\ g(x_0+h) = Q(h) + o(h^n) \quad &, \quad Q(h) = b_0 + b_1 h + ... + b_n h^n\,. \end{aligned}$$

(Si x_0 est un bord de I, il s'agit de développements limités à gauche ou à droite.)

- $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0, donné par :

$$\begin{aligned} f(x_0+h) + g(x_0+h) &= P(h) + Q(h) + o(h^n)\,, \\ P(h) + Q(h) &= a_0 + b_0 + (a_1+b_1)\,h + ... + (a_n+b_n)\,h^n\,. \end{aligned}$$

- fg admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x_0+h)g(x_0+h) = R(h) + o(h^n)\,,$$

  où le polynôme $R(h)$ s'obtient en faisant le produit des polynômes $P(h)$ et $Q(h)$ et en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

- On suppose de plus que $a_0 \neq 0$, i.e. f admet une limite non nulle en x_0. Alors la fonction $1/f$ est définie au voisinage de x_0 dans I et admet un développement limité à l'ordre n en x_0. On l'obtient de la façon suivante : on pose

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= a_0\,(1+\varphi(h)) \\ \text{avec } \varphi(h) &= \frac{1}{a_0}\,(a_1 h + ... + a_n h^n) + o(h^n) \\ &= S(h) + o(h^n)\,. \end{aligned}$$

  Comme $\varphi(h) = O(h)$ au voisinage de $h=0$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+\varphi(h)} = 1 - \varphi(h) + (\varphi(h))^2 - ... + (-1)^n\,(\varphi(h))^n + o\left((\varphi(h))^n\right)$$

  et on en déduit le développement de $1/f$ en ne gardant dans le développement ci-dessus que les termes non négligeables devant h^n ; plus précisément, on a

$$\frac{1}{f(x_0+h)} = \frac{1}{a_0}T(h) + o(h^n) \text{ au voisinage de } h=0$$

  où le polynôme $T(h)$ s'obtient en ne conservant dans le polynôme

$$1 - S(h) + (S(h))^2 - ... + (-1)^n\,(S(h))^n$$

  que les termes de degré $\leq n$.

- On suppose que $b_0 \neq 0$, alors la fonction f/g est définie au voisinage de x_0 dans I et admet en x_0 un développement limité à l'ordre n. Pour l'obtenir, on commence par calculer celui de $1/g$ par la méthode ci-dessus, puis on en déduit celui du produit $f \times (1/g) = f/g$ en appliquant la règle de calcul du développement limité d'un produit.

Composition

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, on considère deux fonctions $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$. On suppose que f admet en x_0 un développement limité à l'ordre n et que g admet en y_0 un développement limité à l'ordre n, donnés par :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= P(h) + o(h^n) \quad , \quad P(h) = y_0 + a_1 h + ... + a_n h^n \, , \\ g(x_0 + \xi) &= Q(\xi) + o(\xi^n) \quad , \quad Q(\xi) = b_0 + b_1 \xi + ... + b_n \xi^n \, . \end{aligned}$$

Alors $g \circ f$ admet en x_0 un développement limité à l'ordre n

$$g\left(f(x_0 + h)\right) = R(h) + o(h^n)$$

où le polynôme $R(h)$ s'obtient en ne conservant dans le polynôme

$$b_0 + b_1 \left(a_1 h + ... + a_n h^n\right) + ... + b_n \left(a_1 h + ... + a_n h^n\right)^n$$

que les termes de degré $\leq n$.

Intégration, dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet en x_0 un développement limité à l'ordre n :

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + o(h^n) \, .$$

Soit F une primitive de f sur I, alors elle admet en x_0 un développement limité à l'ordre $n+1$, donné par :

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} h^{k+1} + o(h^{n+1}) \, .$$

Attention! Dans le cas où $n \geq 1$, si f dérivable sur I et admet en x_0 un développement limité à l'ordre n, cela ne suffit pas pour assurer que f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en x_0. En revanche, si on sait que f est dans $\mathcal{C}^1(I)$ et que f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en x_0 (c'est le cas par exemple si $f \in \mathcal{C}^n(I)$), alors le développement limité de f' est donné par :

$$f'(x_0 + h) = a_1 + 2a_2 h + ... + n a_n h^{n-1} + o(h^{n-1}) \, .$$

Chapitre 4

Introduction à l'intégrale de Riemann

La théorie de l'intégration de Riemann date du milieu du XIXe siècle. Elle est due au mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866), aussi auteur d'un renouvellement complet de la géométrie maintenant appelé géométrie Riemannienne et qui a permis à Einstein de développer la théorie de la relativité générale. Cette théorie de l'intégration est facile à construire à l'aide du procédé dit des sommes de Riemann, basées sur une discrétisation de l'intervalle d'intégration. Cependant, son cadre d'application est assez limité (la construction de l'intégrale est naturelle essentiellement pour les fonctions continues) et les théorèmes de convergence sous le signe intégral sont compliqués à démontrer et à appliquer. Une théorie de l'intégration beaucoup plus puissante apparaîtra au début du XXe siècle avec l'intégrale de Lebesgue, basée sur une discrétisation de l'ensemble des valeurs des fonctions intégrées, plutôt que de l'ensemble sur lequel on intègre. La théorie de Kurzweil-Henstock, introduite autour de 1950, est à peu près aussi simple à définir que la théorie de Riemann et est aussi puissante que la théorie de Lebesgue.

4.1 Construction de l'intégrale des fonctions continues

On commence par construire l'intégrale des fonctions continues positives sur un intervalle fermé borné. Soit $-\infty < a < b < +\infty$, $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continue à valeurs positives. On cherche à calculer l'aire comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses. La méthode proposée par Riemann est basée sur le principe du théorème de l'encadrement (ou théorème des gendarmes, ou du pincement). On va définir deux suites adjacentes appelées sommes de Riemann. Pour cela, on découpe l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de longueurs égales. C'est-à-dire qu'on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_0 = a\,,\ a_1 = a + \frac{b-a}{n}\,,\ \dots,\ a_k = a + k\frac{b-a}{n}\,,\ \dots,\ a_k = a + n\frac{b-a}{n} = b\,.$$

Sur un intervalle $[a_{k-1}, a_k]$, on pose

$$m_k = \min_{x \in [a_{k-1}, a_k]} f(x)\,,\ M_k = \max_{x \in [a_{k-1}, a_k]} f(x)\,.$$

On minore l'aire délimitée par le graphe de f par la somme des aires des rectangles de hauteur m_k et de largeur $\frac{b-a}{n}$. De même on majore l'aire délimitée par le graphe de f par la somme des aires des rectangles de hauteur M_k et de largeur $\frac{b-a}{n}$. Ces aires sont appelées les sommes de

Riemann. La première (celle qui minore) est

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{b-a}{n}\,,$$

la deuxième (celle qui majore) est

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{b-a}{n}\,.$$

La continuité de f et le fait qu'on soit sur un intervalle fermé borné implique que $S_n - s_n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. De plus la suite s_n est croissante et la suite S_n décroissante. Pour être prudent ou simplement pour pouvoir plus simplement montrer la croissance et la décroissance des suites, on peut au lieu de prendre les suites s_n et S_n considérer leurs sous-suites s_{2^n} et S_{2^n}.

La limite commune de ces deux suites est l'aire délimitée par le graphe de f et on la note

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

A noter que si on définit la suite

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{b-a}{n}$$

qui est coincée entre s_n et S_n, on a aussi que σ_n converge vers la même limite que s_n et S_n. La suite σ_n est la somme de Riemann la plus usuelle.

On peut alors définir l'intégrale pour des fonctions continues de signe quelconque. Soit $-\infty < a < b < +\infty$, $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on note f^+ et f^- les parties positive et négative de f qui sont deux fonctions positives définies pas

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\,,\ f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}\,.$$

On a $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. on définit alors l'intégrale de f entre a et b par

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x\,.$$

L'intégrale ainsi définie est linéaire, c'est-à-dire que si f et g sont continues sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$

De plus, on adopte la convention que l'intégrale est orientée, c'est-à-dire que

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

4.2 Le théorème fondamental du calcul intégral

C'est pratiquement le seul théorème qui permette de calculer des intégrales. Il permet de le faire pour toute fonction continue, au moins en théorie car le calcul explicite d'une primitive n'est pas quelque chose d'accessible pour toute fonction continue.

Théorème 4.1 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.** *Soit* $-\infty < a < b < +\infty$*,* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue, soit* F *une primitive de* f *sur* $[a,b]$*. Alors*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Une conséquence directe de ce théorème est le théorème d'integration par parties. Il s'énonce comme suit

Théorème 4.2. *Soit* $-\infty < a < b < +\infty$*,* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$*. Alors*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x\,,$$

où

$$[f(x)g(x)]_a^b$$

est la variation de la fonction fg *entre les bornes* a *et* b*, c'est-à-dire*

$$[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)\,.$$

Preuve. On écrit simplement que

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (fg)'(x)\mathrm{d}x \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) = [f(x)g(x)]_a^b\,. \quad \square\end{aligned}$$

4.3 Changement de variables

Théorème 4.3. *Soit* $-\infty < a < b < +\infty$*,* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue ur* $[a,b]$*. Soit un changement de variable sur* $[a,b]$*, c'est-à-dire une application* $\phi : J \to [a,b]$ *bijective et de classe* $\mathcal{C}^1$ *avec* ϕ' *ne s'annulant pas sur* J*. On note* $c = \phi^{-1}(a)$ *et* $d = \phi^{-1}(b)$*, c'est-à-dire que l'intervalle* J *est* $[c,d]$ *si* ϕ *est croissante et* $[d,c]$ *si* ϕ *est décroisante. Alors on a*

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y = \int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x\,.$$

Autrement dit

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y)\mathrm{d}y = \int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x\,.$$