

# Math2A Semestre 2 – Analyse 2

*Institut de Mathématiques de Bourgogne (IMB)  
Université de Bourgogne Franche-Comté*

## **Organisation**

- CM : 20 heures, 10 séances. TD : 30 heures, 15 séances.
- Page web : <http://jaramillo.perso.math.cnrs.fr/Courses/Math2A/Math2A.html>

## **Intervenants**

- J.L. Jaramillo (responsable, Bureau : A323), CM ([Jose-Luis.Jaramillo@u-bourgogne.fr](mailto:Jose-Luis.Jaramillo@u-bourgogne.fr)).
- R. Ramanakoraisina, TD ([Rodolphe.Ramanakoraisina@u-bourgogne.fr](mailto:Rodolphe.Ramanakoraisina@u-bourgogne.fr)).
- M. Triestino, TD ([Michele.Triestino@u-bourgogne.fr](mailto:Michele.Triestino@u-bourgogne.fr)).
- J. Darné, TD ([Jacques.Darne@u-bourgogne.fr](mailto:Jacques.Darne@u-bourgogne.fr)).



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les nombres réels</b>	<b>5</b>
1.1	Entiers, rationnels, et les autres . . . . .	5
1.2	Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . . .	7
1.2.1	Corps totalement ordonné . . . . .	7
1.2.2	La valeur absolue . . . . .	7
1.2.3	Propriétés de la borne supérieure . . . . .	8
1.3	Propriété d'Archimède, partie entière . . . . .	9
1.4	Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.5	Éléments topologiques de $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.5.1	Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.5.2	$\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	11
1.5.3	Notions topologiques . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>15</b>
2.1	Définitions . . . . .	15
2.2	Propriétés des suites convergentes et critères de convergence . . . . .	17
2.3	Opérations sur les limites et relations d'ordres . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Fonctions à une variable et dérivation</b>	<b>23</b>
3.1	Continuité . . . . .	23
3.1.1	Continuité en un point . . . . .	23
3.1.2	Continuité sur un intervalle . . . . .	24
3.2	Dérivabilité . . . . .	26
3.3	Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis . . . . .	33
3.3.1	Théorèmes associés . . . . .	35
3.4	Conséquences du théorème des accroissements finis . . . . .	37
3.4.1	Inégalité des accroissements finis . . . . .	37
3.4.2	Condition suffisante de dérivabilité en un point . . . . .	38
3.4.3	Sens de variation d'une fonction . . . . .	38
3.4.4	Convexité . . . . .	39
3.5	Formules de Taylor . . . . .	39
3.6	Comparaison de fonctions . . . . .	44
3.6.1	Au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ . . . . .	44
3.6.2	Au voisinage de $+\infty$ . . . . .	47
3.7	Développements limités . . . . .	48
3.7.1	Définitions et propriétés . . . . .	48
3.7.2	Développements limités en 0 des fonctions élémentaires . . . . .	50

3.7.3	Opérations sur les développements limités . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Introduction à l'intégrale de Riemann</b>	<b>55</b>
4.1	Intégrale de Riemann . . . . .	55
4.1.1	Partitions d'un intervalle . . . . .	55
4.1.2	Fonction intégrable au sens de Riemann . . . . .	56
4.1.3	Critère de convergence . . . . .	57
4.2	Résultats sur l'intégration . . . . .	58
4.2.1	Intégrabilité, continuité et monotonie . . . . .	58
4.2.2	Intégrabilité et opérations sur les fonctions . . . . .	59
4.3	Intégration et dérivation . . . . .	60

# Chapitre 1

## Les nombres réels

### 1.1 Entiers, rationnels, et les autres

Lorsqu'on a commencé à mesurer des longueurs, on a utilisé des nombres entiers puis des fractions de nombres entiers : les nombres rationnels. Les grecs anciens (l'école de Pythagore) se sont rendus compte que les nombres rationnels ne suffisent pas à mesurer toutes les longueurs. Ils ont en particulier observé que la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas une longueur rationnelle.

**Théorème 1.1.** *Il n'existe pas de nombre rationnel  $a$  tel que  $a^2 = 2$ .*

**Preuve.** La démonstration est très simple. Supposons qu'il existe  $p, q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $2 = p^2/q^2$ . Quitte à diviser  $p$  et  $q$  un nombre suffisant de fois par 2, on peut supposer que  $p$  ou  $q$  est impair. On a l'égalité

$$\frac{p^2}{q^2} = 2,$$

c'est-à-dire

$$p^2 = 2q^2.$$

Donc  $p^2$  est pair et nécessairement  $p$  aussi. On pose donc  $p = 2p'$  avec  $p' \in \mathbb{N}^*$ . Il suit que

$$q^2 = 2p'^2.$$

Donc  $q^2$  est pair, d'où  $q$  aussi, ce qui contredit l'hypothèse. □

On peut aussi montrer que l'ensemble des rationnels dont le carré est plus petit que 2 n'a pas de "borne supérieure" dans  $\mathbb{Q}$ .

**Proposition 1.1.** *Soit*

$$E = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}.$$

*L'ensemble  $E$  n'a pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$  (la borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant, on verra cette définition et son utilisation très bientôt dans le cours).*

**Preuve.** Supposons que  $E$  ait une borne supérieure  $a$  dans  $\mathbb{Q}$ , nous allons montrer que  $a^2 = 2$ , ce qui contredira  $a \in \mathbb{Q}$ . Pour cela, on va montrer qu'on ne peut pas avoir  $a^2 > 2$  ni  $a^2 < 2$ . Supposons que  $a^2 > 2$ . On peut trouver  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$2 < a^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2a}{n} \quad (\text{i.e. } \frac{1}{n} < a - \sqrt{2}).$$

Alors  $a - 1/n \in \mathbb{Q}$  et  $(a - 1/n)^2 > 2$ . Donc  $a$  n'est pas le plus petit majorant de  $E$ , ce qui est absurde. On doit donc avoir  $a^2 \leq 2$ . De même, supposons que  $a^2 < 2$ , alors on peut trouver  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$a^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2a}{n} < 2 \text{ (i.e. } a + \frac{1}{n} < \sqrt{2}\text{)}.$$

Donc  $a$  n'est pas un majorant de  $E$ . On doit donc avoir  $a^2 \geq 2$ . Il suit que  $a^2 = 2$  et donc  $a \notin \mathbb{Q}$ .  $\square$

Devant l'insuffisance des nombres rationnels, on construit ce qu'on appelle maintenant l'ensemble  $\mathbb{R}$ , ensemble des nombres réels. On peut le construire de deux façons équivalentes (équivalentes signifiant ici qu'on obtient le même ensemble).

1.  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des limites de suites d'éléments de  $\mathbb{Q}$  (on verra dans le chapitre 2 la notion de suite et de limite).
2.  $\mathbb{R}$  est le plus petit corps contenant le corps  $\mathbb{Q}$  comme sous-corps, dont la relation d'ordre prolonge celle de  $\mathbb{Q}$  et dans lequel toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure. Comme  $\mathbb{Q}$  ne vérifie pas cette dernière propriété, on a une inclusion stricte de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

La première définition de  $\mathbb{R}$  est constructive et intuitive au sens où le développement décimal d'un nombre réel  $x$  donne précisément une suite de rationnels qui tend vers  $x$ . Attention, ce développement n'est pas unique, en effet on a

$$1 = 0.9999999999999999\dots$$

à condition bien sûr qu'il y ait une infinité de 9 dans le développement. On voit notamment ici que la suite

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0.9, \quad u_2 = 0.99, \quad u_3 = 0.999, \dots$$

tend vers 1.

Il y a plusieurs classes de nombres intéressants dans  $\mathbb{R}$  :

- nombres entiers naturels  $\mathbb{N}$ ;
- nombres entiers relatifs  $\mathbb{Z}$ ;
- nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ ;
- nombres algébriques  $\mathcal{A}$ ; ce sont les nombres qui sont racines d'un polynôme réel à coefficients entiers;
- nombres calculables  $\mathcal{C}$  qui sont les nombres dont on peut calculer les décimales à l'aide d'un algorithme;
- nombres non calculables  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$ ;
- nombres transcendants  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ .

Tous les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$  sont dénombrables, c'est-à-dire qu'on peut tous les compter avec les entiers naturels. On peut par exemple montrer cette propriété facilement au tableau pour l'ensemble  $\mathbb{Q}$ . L'ensemble  $\mathbb{R}$  en revanche est non dénombrable. Donc les nombres transcendants, de même que les nombres non calculables, sont bien plus nombreux que les entiers, les rationnels, les nombres algébriques et les nombres calculables. On a les inclusions strictes suivantes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \mathbb{R}.$$

Parmi les nombres algébriques, il n'y a pas que des rationnels, par exemple  $\sqrt{2}$  est algébrique, car  $\sqrt{2}^2 = 2$ , mais il n'est pas rationnel. Parmi les nombres calculables, il y a des nombres transcendants, comme  $\pi$  ou  $e$ .

## 1.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

### 1.2.1 Corps totalement ordonné

L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni des lois internes  $+$ ,  $\times$  et de la relation d'ordre  $\leq$  est un corps totalement ordonné, c'est-à-dire que

- $(\mathbb{R}, +, \times)$  est un corps :
  - $(\mathbb{R}, +)$  est un groupe commutatif,
  - $\times$  est associative,
  - $\mathbb{R}$  possède un élément neutre pour  $\times$ ,
  - $\times$  est distributive par rapport à  $+$ ,
  - $\times$  est commutative,
  - tout élément non nul de  $\mathbb{R}$  admet un inverse pour  $\times$  ;
- la relation  $\leq$  est une relation d'ordre total sur  $\mathbb{R}$  :
  - réflexive : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq x$ ,
  - antisymétrique : pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq y$  et  $y \leq x$  implique que  $x = y$ ,
  - transitive : pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq y$  et  $y \leq z$  implique que  $x \leq z$ ,
  - totale : pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a ou bien  $x \leq y$  ou bien  $y \leq x$  ;
- pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$  ;
- pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$  tels que  $x \leq y$  et  $z \geq 0$ , on a  $xz \leq yz$ .

### 1.2.2 La valeur absolue

**Définition 1.1.** La valeur absolue d'un nombre réel est définie par

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La valeur absolue a des propriétés importantes à retenir et dont la démonstration est immédiate.

**Proposition 1.2.** *Etant donnés  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $h$  un réel strictement positif, on a*

1.  $|x| \geq 0$ ,
2.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
3.  $|x - y| \leq h \Leftrightarrow y - h \leq x \leq y + h$ ,
4.  $|xy| = |x||y|$ ,
5.  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

*La dernière inégalité est connue sous le nom d'inégalité triangulaire.*

On a une conséquence utile de l'inégalité triangulaire.

**Corollaire 1.1.** *Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

**Preuve.** On a  $x = x - y + y$  d'où par l'inégalité triangulaire

$$|x| \leq |x - y| + |y|,$$

c'est-à-dire

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Mais bien sûr on peut intervertir  $x$  et  $y$  et on a donc aussi

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

On en déduit donc que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Ceci conclut la preuve. □

### 1.2.3 Propriétés de la borne supérieure

**Définition 1.2.** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ . La borne supérieure de  $X$  est le plus petit des majorants de  $X$ . La borne inférieure de  $X$  est le plus grand des minorants de  $X$ .

*Remarque 1.1.* 1. Si la borne supérieure d'une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est un élément de  $X$ , c'est le plus grand élément de  $X$  noté  $\max X$ .  
2. Si la borne inférieure d'une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est un élément de  $X$ , c'est le plus petit élément de  $X$  noté  $\min X$ .

On admettra que  $\mathbb{R}$  vérifie le principe de la borne supérieure qui s'exprime ainsi :

**Proposition 1.3** (Principe de la borne supérieure). *La borne supérieure de toute partie non vide de  $\mathbb{R}$  existe et est ou bien un réel (si la partie est majorée) ou bien  $+\infty$ .*

*Remarque 1.2.* Evidemment, on peut aussi énoncer le principe de la borne inférieure : la borne inférieure de toute partie non vide de  $\mathbb{R}$  existe et est ou bien un réel (si la partie est minorée) ou bien  $-\infty$ .

La borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  est caractérisée de la façon suivante.

**Proposition 1.4.** — *Soit  $X$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ . Sa borne supérieure est l'unique  $a \in \mathbb{R}$  tel que :*

1. pour tout  $x \in X$ ,  $x \leq a$  (i.e.  $a$  est un majorant de  $X$ );
2. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \in X$  tel que  $a - \varepsilon < x$ .

— *Soit  $X$  une partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$ . Sa borne inférieure est l'unique  $a \in \mathbb{R}$  tel que :*

1. pour tout  $x \in X$ ,  $x \geq a$  (i.e.  $a$  est un minorant de  $X$ );
2. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \in X$  tel que  $a + \varepsilon > x$ .

**Preuve.** Nous démontrons simplement la caractérisation de la borne supérieure, celle de la borne inférieure se démontre de façon similaire. La première condition exprime simplement que  $a$  est un majorant. La seconde est équivalente au fait qu'il n'existe pas de majorant plus petit que  $a$ ; en effet, tout nombre strictement plus petit que  $a$  s'écrit sous la forme  $a - \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  et la condition 2 exprime que tout nombre plus petit que  $a$  n'est pas un majorant de  $X$ . Les conditions 1 et 2 sont donc équivalentes au fait que  $a$  est la borne supérieure de  $X$ . □

### 1.3 Propriété d'Archimède, partie entière

**Proposition 1.5.**  $\mathbb{R}$  est Archimédien, c'est-à-dire : pour tout  $x > 0$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $nx > y$ .

**Preuve.** Supposons que ce soit faux : il existe  $x > 0$  et  $y \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $nx \leq y$ . Alors l'ensemble

$$A = \{nx; n \in \mathbb{N}\}$$

est une partie majorée (par  $y$ ) de  $\mathbb{R}$ , elle admet donc une borne supérieure  $a \in \mathbb{R}$ . En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $(n+1)x \leq a$  et donc  $nx \leq a - x$ . Donc  $a - x$  est un majorant de  $A$  et  $a - x < a$ . C'est impossible car  $a$  est la borne supérieure de  $A$ .  $\square$

On peut donner une propriété plus précise qui amène naturellement la notion de partie entière.

**Proposition 1.6.** Etant donnés  $x \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ , il existe un unique  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $na \leq x < (n+1)a$ .

**Preuve.** Commençons par montrer l'unicité. Supposons que  $n$  et  $n'$  soient des entiers relatifs tels que

$$na \leq x < (n+1)a \text{ et } n'a \leq x < (n'+1)a.$$

Alors

$$n \leq \frac{x}{a} < n+1 \text{ et } n' \leq \frac{x}{a} < n'+1.$$

On a aussi

$$n \leq \frac{x}{a} < n'+1,$$

ce qui implique  $n - n' < 1$ , i.e.  $n - n' \leq 0$  car  $n$  et  $n'$  sont des entiers, et

$$n' \leq \frac{x}{a} < n+1,$$

ce qui implique  $n' - n < 1$ , i.e.  $n' - n \leq 0$ . Il suit  $n = n'$ .

Montrons maintenant l'existence. Comme  $\mathbb{R}$  est Archimédien, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $na \geq -x$ . L'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{Z}; na \leq x\}$$

est donc une partie non vide et majorée de  $\mathbb{Z}$ , elle contient donc un plus grand élément  $n_1$ . Comme  $n_1 + 1 \notin A$ , on a

$$n_1 a \leq x < (n_1 + 1)a.$$

Ceci conclut la preuve.  $\square$

Si on applique la proposition ci-dessus avec  $a = 1$ , l'entier  $n$  obtenu s'appelle la partie entière de  $x$ .

**Définition 1.3.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ , l'unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq x < n+1$  s'appelle la partie entière de  $x$  et est noté  $[x]$ .

## 1.4 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ . Ceci signifie :

**Proposition 1.7.** *Etant donnés  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ , il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle  $]x, y[$ .*

**Preuve.** Posons

$$q = \left[ \frac{1}{y-x} \right] + 1 \text{ et } p = [qx].$$

On a alors

$$q > \frac{1}{y-x}, \quad q \geq 1 > 0$$

et

$$p \leq qx < p + 1.$$

Comme  $q > 0$ , on peut diviser par  $q$  cette dernière inégalité :

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}.$$

On en déduit que

$$x < \frac{p+1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y-x) = y.$$

Donc le rationnel  $\frac{p+1}{q}$  est dans l'intervalle  $]x, y[$ .

Peut-on aussi trouver un irrationnel dans cet intervalle ? C'est facile : on peut trouver un rationnel  $r$  dans l'intervalle  $]x + \sqrt{2}, y + \sqrt{2}[$ , le nombre  $r - \sqrt{2}$  est irrationnel et est dans l'intervalle  $]x, y[$ .  $\square$

## 1.5 Éléments topologiques de $\mathbb{R}$

### 1.5.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

**Définition 1.4.** Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont les ensembles

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, \\ [a, b[ &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \\ ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, \\ ]a, b[ &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, \\ [a, +\infty[ &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}, \\ ]a, +\infty[ &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, \\ ]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}, \\ ]-\infty, b[ &= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.5.** Un ensemble  $C$  est dit convexe lorsque, pour tous  $x$  et  $y$  de  $C$ , l'intervalle (segment)  $]x, y[$  est complètement dans  $C$ , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1] \quad tx + (1-t)y \in C$$

**Proposition 1.8.** *Les intervalles de  $X$  sont les parties convexes de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire les parties  $P$  de  $\mathbb{R}$  telles que, quels que soient  $x, y \in P$ ,  $x < y$ , on a  $[x, y] \subset P$ .*

**Preuve.** Les intervalles sont évidemment convexes. Réciproquement, si  $P$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}$ , soit  $a = \inf P$ ,  $b = \sup P$ . Alors  $]a, b[ \subset P$  et la seule question est de savoir si  $a, b$  sont ou non infinis et sont ou non dans  $P$ . On a huit cas possibles :

1.  $-\infty < a, b < +\infty, a \in P, b \in P$ , alors  $P = [a, b]$  ;
2.  $-\infty < a, b < +\infty, a \in P, b \notin P$ , alors  $P = [a, b[$  ;
3.  $-\infty < a, b < +\infty, a \notin P, b \in P$ , alors  $P = ]a, b]$  ;
4.  $-\infty < a, b < +\infty, a \notin P, b \notin P$ , alors  $P = ]a, b[$  ;
5.  $a = -\infty, b < +\infty, b \in P$ , alors  $P = [-\infty, b]$  ;
6.  $a = -\infty, b < +\infty, b \notin P$ , alors  $P = ]-\infty, b[$  ;
7.  $a > -\infty, b = +\infty, a \in P$ , alors  $P = [a, +\infty[$  ;
8.  $a > -\infty, b = +\infty, a \notin P$ , alors  $P = ]a, +\infty[$ .

□

### 1.5.2 $\bar{\mathbb{R}}$

**Définition 1.6.** L'ensemble  $\bar{\mathbb{R}}$  est  $\mathbb{R}$  auquel on ajoute les éléments  $+\infty$  et  $-\infty$  :

$$\bar{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Il est muni d'une relation d'ordre totale héritée de celle sur  $\mathbb{R}$  en posant de plus pour tout  $x \in \bar{\mathbb{R}}$

$$-\infty \leq x \leq +\infty.$$

On a les propriétés suivantes :

- $+\infty$  est le plus grand élément de  $\bar{\mathbb{R}}$  ;
- $-\infty$  est le plus petit élément de  $\bar{\mathbb{R}}$  ;
- toute partie de  $\bar{\mathbb{R}}$  admet une borne supérieure dans  $\bar{\mathbb{R}}$  ;
- toute partie de  $\bar{\mathbb{R}}$  admet une borne inférieure dans  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Les opérations  $+$  et  $\times$  se prolongent en partie à  $\bar{\mathbb{R}}$ , certaines opérations ne sont pas définies, comme par exemple  $+\infty + (-\infty)$ . On a les tables suivantes :

$+$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$?$
$y \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	$?$	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}^{-*}$	$0$	$x \in \mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$?$	$-\infty$	$-\infty$
$y \in \mathbb{R}^{-*}$	$+\infty$	$xy$	$0$	$xy$	$-\infty$
$0$	$?$	$0$	$0$	$0$	$?$
$y \in \mathbb{R}^{+*}$	$-\infty$	$xy$	$0$	$xy$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$?$	$+\infty$	$+\infty$

### 1.5.3 Notions topologiques

La compréhension des concepts liés aux limites et à la continuité, qu'on étudiera dans la section 3.1, est naturellement possée dans une perspective dite topologique. D'autre part, la droite réelle  $\mathbb{R}$  proportionne un exemple très riche pour l'introduction et discussion des éléments topologiques de base. Nous introduisons ici quelques notions topologiques basiques, comme motivation pour des cours plus avancés sur le sujet.

**Définition 1.7.** (*intérieur d'un ensemble*). Soit  $A \subset \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Nous disons que  $a$  est un *point intérieur* de  $A$  s'il existe un nombre réel positif  $\delta$ , tel que  $]a - \delta, a + \delta[ \subset A$ . L'ensemble des points intérieurs es nommé *intérieur* de  $A$  est noté par  $\text{int}A$  ou  $\overset{\circ}{A}$ .

**Définition 1.8.** (*adhérence d'un ensemble*). Soit  $A \subset \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Nous disons que  $a$  est un *point adhérent* de  $A$  si  $\forall \delta > 0$  on a

$$]a - \delta, a + \delta[ \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points adhérents est nommé *adhérence* de  $A$  est noté par  $\bar{A}$ .

**Définition 1.9.** (*point d'accumulation*). Soit  $A \subset \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Nous disons que  $a$  est un *point d'accumulation* de  $A$  si  $\forall \delta > 0$  on a

$$(|a - \delta, a[ \cup ]a, a + \delta|) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points d'accumulations est nommé *ensemble dérivé* de  $A$  est noté par  $A'$ . On a  $\bar{A} = A \cup A'$ .

**Exemple.** Adhérence et accumulation n'est coïncide pas en générale. Soit l'ensemble  $A = \{1\} \cup ]2, 3[$ . On vérifie

$$\bar{A} = \{1\} \cup [2, 3] \quad , \quad A' = [2, 3]$$

**Définition 1.10.** (*frontière d'un ensemble*). Soit  $A \subset \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Nous disons que  $a$  est un *point frontière* de  $A$  si  $\forall \delta > 0$  on a

$$]a - \delta, a + \delta[ \cap A \neq \emptyset \text{ et } ]a - \delta, a + \delta[ \cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset ,$$

c'est-à-dire, si  $a \in \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A}$ . L'ensemble des points frontière est nommé *frontière* de  $A$  est noté par  $\partial A$ . On a  $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A}$ .

### Ensembles ouverts et fermés

**Définition 1.11.** (*ensembles ouverts et fermés*). Soit  $A \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $A$  est ouvert si vérifie  $\text{int}A = A$  (c.à.d  $\overset{\circ}{A} = A$ ) et est fermé si  $\bar{A} = A$ .

**Propriétés :** Soit  $\Omega$  un ensemble d'indices et la famille d'ensembles  $\{A_i, i \in \Omega\}$ . On vérifie :

i) Si  $\Omega$  est un ensemble quelconque (en particulier infini) et  $A_i$  sont ouverts

$$A = \bigcup_{i \in \Omega} A_i \text{ est ouvert .}$$

ii) Si  $\Omega$  est un ensemble quelconque (en particulier infini) et  $A_i$  sont fermés

$$A = \bigcap_{i \in \Omega} A_i \text{ est fermé .}$$

iii) Si  $\Omega$  est un ensemble fini et  $A_i$  sont ouverts

$$A = \bigcap_{i \in \Omega} A_i \text{ est ouvert .}$$

iv) Si  $\Omega$  est un ensemble fini et  $A_i$  sont fermés

$$A = \bigcup_{i \in \Omega} A_i \text{ est fermé .}$$

**Définition 1.12.** (*ensemble borné*). Soit  $A \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $A$  est borné s'il existe un réel  $M > 0$  tel que  $A \subset (-M, M)$ .

**Définition 1.13.** (*ensemble compacte*). Soit  $A \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $A$  est compact s'il est fermé et borné.

Le comportement des espaces ouverts, fermés et compacts est particulièrement important dans l'étude de la continuité.



# Chapitre 2

## Suites numériques

### 2.1 Définitions

**Définition 2.1.** On appelle suite réelle un ensemble de nombres réels indexés par  $\mathbb{N}$ , i.e. une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . Au lieu de noter  $u(n)$  les éléments d'une suite  $u$ , on les notera plutôt  $u_n$  et la suite est alors notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On considérera aussi des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ou encore  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0}$ .

**Deux exemples fondamentaux.**

— **Suite arithmétique.** On appelle suite arithmétique de premier terme  $a$  et de raison  $r$  la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_n = a + nr.$$

On peut calculer la somme des  $n + 1$  premiers termes d'une telle suite

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= a + (a + r) + (a + 2r) + \dots + (a + nr) \\ &= (n + 1)a + \underbrace{(1 + 2 + \dots + n)}_S r. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \dots + n \\ S &= n + n - 1 + \dots + 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si on fait l'addition :

$$2S = n(n + 1) \implies S = \frac{n(n + 1)}{2}, \tag{2.2}$$

et on trouve finalement

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n + 1)a + r \frac{n(n + 1)}{2}. \tag{2.3}$$

— **Suite géométrique.** On appelle suite géométrique de premier terme  $a$  et de raison  $\lambda$  la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_n = a\lambda^n.$$

On peut calculer la somme des  $n + 1$  premiers termes d'une telle suite

$$\sum_{k=0}^n u_k = a + a\lambda + a\lambda^2 + \dots + a\lambda^n = a \underbrace{(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n)}_S \quad (2.4)$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned} S &= 1 + \lambda + \dots + \lambda^n \\ \lambda S &= \lambda + \dots + \lambda^n + \lambda^{n+1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

En faisant la différence

$$(1 - \lambda S) = 1 - \lambda^{n+1} \implies S = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} . \quad (2.6)$$

Finalement

$$\sum_{k=0}^n u_k = a \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} . \quad (2.7)$$

**Définition 2.2.** Une suite est dite constante si  $u_{n+1} = u_n$  pour tout  $n$ . Elle est dite stationnaire si  $u_{n+1} = u_n$  au delà d'un certain rang, i.e. s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $u_{n+1} = u_n$ .

**Définition 2.3.** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite

- majorée s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$ ,
- minorée s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq m$ ,
- bornée si elle est majorée et minorée, i.e. s'il existe  $M \geq 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| \leq M$ .

**Définition 2.4.** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite

- croissante si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$ ,
- décroissante si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ ,
- strictement croissante si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} > u_n$ ,
- strictement décroissante si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} < u_n$ ,
- monotone si elle est croissante ou décroissante,
- strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Définition 2.5** (Convergence). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon .$$

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite convergente s'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

**Définition 2.6** (Suite divergente). On dira qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- tend vers  $+\infty$  si  $\forall A \in \mathbb{R}$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $u_n \geq A$ ,
- tend vers  $-\infty$  si  $\forall A \in \mathbb{R}$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $u_n \leq A$ .

Dans les deux cas, on dira que la suite est divergente. On dira aussi qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente si la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ . Autrement dit, une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente si et seulement si la suite  $(1/u_n)$  (définie pour  $n \in \mathbb{N}$  ou pour  $n \geq n_0$  si certains des premiers termes de  $(u_n)$  sont nuls) converge vers 0.

**Définition 2.7** (Sous-suite). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On appelle sous-suite, ou suite extraite, de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , toute suite  $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application strictement croissante. On notera aussi fréquemment les suites extraites  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $k \mapsto n_k$  étant une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans lui-même.

*Remarque 2.1.* Si  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application strictement croissante, on a  $\phi(n) \geq n$ .

**Exemples.**

1. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  constante est convergente vers  $u_0$ .
2. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  donné, la suite géométrique  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 si  $|\lambda| < 1$ , est constante égale à 1 si  $\lambda = 1$  et n'a pas de limite dans les autres cas ; elle diverge pour  $|\lambda| > 1$  et tend vers  $+\infty$  pour  $\lambda > 1$ .
3. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  donné, la suite  $(1/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 si  $\alpha > 0$ , est constante égale à 1 si  $\alpha = 0$ , tend vers  $+\infty$  si  $\alpha < 0$ .
4. Toute suite arithmétique de raison  $r \neq 0$  est divergente (elle est constante si la raison est nulle) ; elle tend vers  $+\infty$  si  $r > 0$  et vers  $-\infty$  si  $r < 0$ .
5. La suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite et n'est pas divergente. Sa sous-suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à 1 et sa sous-suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $-1$  ; ces deux sous-suites sont donc convergentes et ont des limites différentes.

## 2.2 Propriétés des suites convergentes et critères de convergence

**Proposition 2.1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente et  $\ell$  sa limite, alors la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $|\ell|$ .

**Preuve.** C'est une conséquence directe de l'inégalité

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad \square$$

**Proposition 2.2.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente, alors elle est bornée.

**Preuve.** Soit  $l \in \mathbb{R}$  la limite de la suite et  $\varepsilon > 0$  donné, prenons par exemple  $\varepsilon = 1$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $u_n \in [l - 1, l + 1]$ . On pose

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, |l - 1|, |l + 1|\}.$$

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $|u_n| \leq M$ . □

**Proposition 2.3.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite tendant vers  $+\infty$ , alors elle est minorée.

**Preuve.** La démonstration ressemble beaucoup à celle de la proposition précédente. Soit par exemple  $A = 1$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $u_n \geq A$ . Soit

$$m = \min\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, A\},$$

alors  $u_n \geq m$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Proposition 2.4.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente et  $\ell \in \mathbb{R}$  sa limite, alors toute suite extraite de  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Preuve.** Soit  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  une sous-suite de la suite  $(u_n)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , on sait qu'il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ . On sait aussi que  $n_k \geq k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Donc pour tout  $k \geq n_0$  on a  $|u_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon$ . La suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $\ell$ .  $\square$

On en déduit une façon de montrer qu'une suite ne converge pas.

**Corollaire 2.1.** *Si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite ne convergeant pas, ou admet deux sous-suites convergentes mais ayant des limites différentes, alors la suite ne converge pas.*

**Proposition 2.5.** *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente de limite  $\ell > 0$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $u_n > 0$ . Plus précisément il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $u_n > \delta$ .*

**Preuve.** On applique la définition de la limite avec  $\varepsilon = \ell/2$ , on prend un  $n_0$  correspondant et par exemple  $\delta = \ell/4$ .  $\square$

**Théorème 2.1** (Comparaison).

1. **Théorème de l'encadrement, ou du pincement** (Appelé aussi théorème des gendarmes.) *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites numériques. On suppose que  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers la même limite  $l$  et qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$  on ait*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

*Alors la suite  $(v_n)$  est convergente de limite  $l$ .*

2. **Une application importante.** *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques, on suppose que  $v_n \geq 0$  pour tout  $n$ . Si  $|u_n| \leq v_n$  au delà d'un certain rang et si la suite  $(v_n)$  converge vers 0, alors  $(u_n)$  converge vers 0.*
3.  *$|u_n| \geq v_n$  au delà d'un certain rang et si la suite  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ , alors  $(u_n)$  diverge.*

**Preuve.**

1. Soit  $\varepsilon > 0$ , on sait que
  - $\exists n_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_1$  on ait  $l - \varepsilon \leq v_n \leq l + \varepsilon$ ,
  - $\exists n_2 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_2$  on ait  $l - \varepsilon \leq w_n \leq l + \varepsilon$ .
 Alors en posant  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , on a pour tout  $n \geq n_0$

$$l - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq l + \varepsilon.$$

La suite  $(u_n)$  est donc convergente de limite  $l$ .

2. C'est une application directe du théorème des gendarmes avec les suites  $(-v_n)$  et  $(v_n)$  qui encadrent  $(u_n)$  pour  $n$  assez grand.
3. immédiat.  $\square$

**Proposition 2.6** (Estimation a priori). *Toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante et majorée est convergente et sa limite est  $\sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Toute suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante et minorée est décroissante et sa limite est  $\inf\{v_n; n \in \mathbb{N}\}$ .*

**Preuve.** On démontre la première assertion. La deuxième est similaire, il suffit de changer les signes. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante et majorée. Soit

$$\ell = \sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Montrons que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on sait qu'il existe un terme de la suite qui est strictement plus grand que  $\ell - \varepsilon$ , i.e. il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\ell - \varepsilon < u_{n_0}$ . Mais comme la suite est croissante et comme  $\ell$  est un majorant de la suite, on a pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell.$$

Et donc en particulier, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ .  $\square$

On a vu que si une suite est convergente, toutes ses sous-suites le sont aussi et convergent vers la même limite. La réciproque est vraie mais peu intéressante du fait que la suite est elle-même une de ses sous-suites. Par contre on peut choisir certaines sous-suites dont l'étude suffit à conclure à la convergence ou à la non convergence de la suite.

**Proposition 2.7.** *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. Si ses sous-suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes et on la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et converge vers  $\ell$ .*

**Preuve.** Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_1, |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon, \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_2, |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On pose  $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$ . Alors pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ .  $\square$

*Remarque 2.2.* Il en va de même de tout ensemble fini de sous-suites de  $(u_n)$  dont les indices couvrent  $\mathbb{N}$  ou tout au moins un ensemble  $\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ . Par exemple  $(u_{3n})$ ,  $(u_{3n+1})$ ,  $(u_{3n+2})$ .

**Définition 2.8** (Suites adjacentes). On appelle suites adjacentes deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

1.  $(u_n)$  est croissante,
2.  $(v_n)$  est décroissante,
3.  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,
4.  $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**Proposition 2.8.** *Des suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

**Preuve.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites adjacentes. La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $v_0$ , en effet

$$u_n \leq v_n \leq v_0 \text{ pour tout } n.$$

La suite  $(u_n)$  est donc convergente et sa limite est  $l_1 = \sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ . De même la suite  $(v_n)$  est décroissante et minorée par  $u_0$ , elle est donc convergente et sa limite est  $l_2 = \inf\{v_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Montrons que  $l_1 = l_2$ . Tout d'abord,  $l_1 \leq l_2$ . En effet,  $l_1$  est le plus petit majorant de la suite  $(u_n)$  et pour tout  $n$ ,  $v_n$  est un majorant de la suite  $(u_n)$ . Donc  $l_1 \leq v_n$  pour tout  $n$ . Il suit que  $l_1$  est un minorant de la suite  $(v_n)$ , il est donc plus petit que le plus petit minorant de la suite  $(v_n)$  qui est  $l_2$ . Donc pour tout  $n$  on a

$$u_n \leq l_1 \leq l_2 \leq v_n.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $|u_n - v_n| \leq \varepsilon$ . Alors

$$0 \leq l_2 - l_1 \leq v_{n_0} - u_{n_0} \leq \varepsilon.$$

On a donc

$$0 \leq l_2 - l_1 \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

ce qui implique  $l_1 = l_2$ . □

Un corollaire de ce résultat est le

**Théorème 2.2** (des segments emboîtés). *On considère des intervalles de  $\mathbb{R}$   $[a_n, b_n]$  emboîtés, i.e. tels que  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et dont la longueur tend vers 0. Alors leur intersection est réduite à un seul point.*

## 2.3 Opérations sur les limites et relations d'ordres

**Proposition 2.9** (Somme, produit, quotient). *Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergentes,  $l_1$  et  $l_2$  leurs limites respectives. Alors :*

- $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et sa limite est  $l_1 + l_2$  ;
- $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et sa limite est  $l_1 l_2$  ;
- si  $l_2 \neq 0$ , la suite  $(u_n/v_n)_{n \geq n_0}$  est définie pour  $n_0$  assez grand, est convergente et sa limite est  $l_1/l_2$ .

**Preuve.**

- **Somme.** Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |u_n - l_1| &\leq \varepsilon/2, \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |v_n - l_2| &\leq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

On pose  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a

$$|u_n + v_n - l_1 - l_2| \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2| \leq 2\varepsilon/2.$$

- **Produit.** La suite  $(u_n)$  étant convergente, elle est bornée. Il existe donc  $M > 0$  tel que  $|u_n| \leq M$  pour tout  $n$ . On pose aussi  $C = \max\{l_2, 1\}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |u_n - l_1| &\leq \varepsilon/(2C), \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |v_n - l_2| &\leq \varepsilon/(2M). \end{aligned}$$

On pose  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a

$$|u_n v_n - l_1 l_2| \leq |u_n(v_n - l_2)| + |(u_n - l_1)l_2| \leq M\varepsilon/(2M) + C\varepsilon/(2C) = \varepsilon.$$

- Il suffit de montrer que la suite  $(1/v_n)$  est définie pour  $n$  assez grand et converge vers  $1/l_2$ , puis on applique le point précédent. La suite  $(|v_n|)$  converge vers  $|l_2| > 0$  et d'après la proposition 2.5, il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_1$  on ait  $|v_n| > |l_2|/4$ . La suite  $(1/v_n)$  est donc définie pour  $n \geq n_1$  et pour tout  $n \geq n_1$ ,  $|1/v_n| \leq 4/|l_2|$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_2, |v_n - l_2| \leq \varepsilon |l_2|^2/4.$$

On pose  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Alors pour  $n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l_2} \right| = \left| \frac{l_2 - v_n}{l_2 v_n} \right| \leq \frac{|l_2 - v_n|}{|l_2| |v_n|} \leq \frac{4}{|l_2|} \frac{1}{|l_2|} \varepsilon |l_2|^2/4 = \varepsilon. \quad \square$$

**Proposition 2.10** (Extension à  $\bar{\mathbb{R}}$ ). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ayant des limites respectives  $l_1$  et  $l_2$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . Alors dans tous les cas où  $l_1 + l_2$  et  $l_1 l_2$  sont définis on a :

- $(u_n + v_n)$  tend vers  $l_1 + l_2$  ;
- $(u_n v_n)$  tend vers  $l_1 l_2$  ;
- si  $l_2 = \pm\infty$  et  $l_1 \in \mathbb{R}$ , la suite  $(u_n/v_n)_{n \geq n_0}$  est définie pour  $n_0$  assez grand et converge vers 0.

**Preuve.** On laisse comme exercice.

**Proposition 2.11.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergentes, soit  $l_1$  la limite de  $(u_n)$  et  $l_2$  la limite de  $(v_n)$ .

1. Si il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n < M$  pour tout  $n$ , alors  $l_1 \leq M$ .
2. Si il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n \leq M$  pour tout  $n$ , alors  $l_1 \leq M$ .
3. Si il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n > m$  pour tout  $n$ , alors  $l_1 \geq m$ .
4. Si il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n \geq m$  pour tout  $n$ , alors  $l_1 \geq m$ .
5. Si  $u_n < v_n$  pour tout  $n$ , alors  $l_1 \leq l_2$ .
6. Si  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ , alors  $l_1 \leq l_2$ .

A noter que si les hypothèses sont vérifiées pour  $n \geq n_0$ , les conclusions restent valables.

**Preuve.** Il suffit de montrer les points 2, 4 et 6, les autres en découlent.

2. Supposons que  $l_1 > M$ , alors pour  $\varepsilon = (l_1 - M)/2$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$  on ait

$$l_1 - \varepsilon \leq u_n \leq l_1 + \varepsilon.$$

Comme

$$l_1 - \varepsilon = l_1 - \frac{l_1 - M}{2} = \frac{l_1 + M}{2} > M,$$

il suit que tous les  $u_n$  avec  $n \geq n_0$  sont strictement supérieurs à  $M$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

4. Démonstration analogue à celle du point 2.
6. Supposons que  $l_1 > l_2$ . On pose  $\varepsilon = (l_1 - l_2)/3$ . Alors

$$\begin{aligned} \exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_1, l_1 - \varepsilon \leq u_n \leq l_1 + \varepsilon, \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_2, l_2 - \varepsilon \leq v_n \leq l_2 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors pour  $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ , on a

$$u_n \geq l_1 - \varepsilon > l_2 + \varepsilon \geq v_n$$

ce qui contredit l'hypothèse. □

**Théorème 2.3** (de Bolzano-Weierstrass). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée, alors elle admet une sous-suite convergente.

**Preuve.** Soit  $m$  et  $M$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $m < M$ , tels que  $m \leq u_n \leq M$  pour tout  $n$ . On procède par dichotomie. On pose  $a_0 = m$ ,  $b_0 = M$ ,  $I_0 = [a_0, b_0]$  et on pose  $n_0 = 0$ . On considère alors la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ . Si elle admet une infinité d'éléments dans l'intervalle  $[m, (m + M)/2]$ , on prend un  $n_1 \geq 1$  tel que  $u_{n_1} \in [m, (m + M)/2]$  et on pose  $a_1 = m$ ,  $b_1 = (m + M)/2$ ,  $I_1 = [a_1, b_1]$ . Sinon, on prend un  $n_1 \geq 1$  tel que  $u_{n_1} \in [(m + M)/2, M]$  et on pose  $a_1 = (m + M)/2$ ,  $b_1 = M$ ,  $I_1 = [a_1, b_1]$ . On recommence la procédure indéfiniment pour engendrer une sous-suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(u_n)$  et les intervalles  $I_k = [a_k, b_k]$ . Les intervalles  $I_k$  sont emboîtés et la longueur de  $I_k$  est  $(M - m)/2^k$ . Autrement dit, les trois suites  $(a_k)_k$ ,  $(b_k)_k$  et  $(u_{n_k})_k$  vérifient :

- $a_k \leq u_{n_k} \leq b_k$ ,
- $(a_k)$  est croissante,
- $(b_k)$  est décroissante,
- $(|b_k - a_k|)$  tend vers 0.

Par le théorème des suites adjacentes et celui des gendarmes, il suit que la suite  $(u_{n_k})$  est convergente.  $\square$

# Chapitre 3

## Fonctions à une variable et dérivation

### 3.1 Continuité

#### 3.1.1 Continuité en un point

On considère un intervalle ouvert  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , une fonction  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  et un point  $x_0 \in ]a, b[$ .

**Définition 3.1.** On dit que

—  $f$  admet en  $x_0$  la limite finie  $\ell \in \mathbb{R}$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in ]a, b[, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et on écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell;$$

—  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $x_0$  si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in ]a, b[, |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

et on écrit alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

On a bien sûr une définition analogue pour

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

**Définition 3.2.** On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $f$  admet une limite finie en  $x_0$  et cette limite vaut  $f(x_0)$ . C'est-à-dire si et seulement si (voir figure 3.1)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0; \forall x \in ]a, b[, |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Définition 3.3.** 1. On dit que  $f$  est continue à gauche en  $x_0$  si et seulement si  $f$  admet une limite finie à gauche en  $x_0$  et cette limite vaut  $f(x_0)$ . C'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0; \forall x \in ]a, b[, x_0 - \eta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

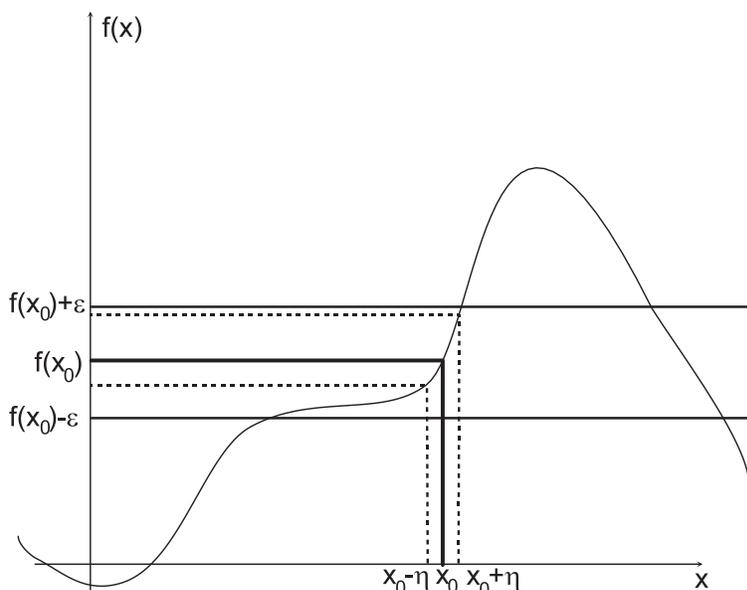


FIGURE 3.1 – Un choix possible de  $\eta$  pour un  $\varepsilon$  donné. Toutes les valeurs de  $f$  sur l'intervalle  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  se trouvent dans la bande  $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ .  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si, pour n'importe quel  $\varepsilon > 0$ , on peut faire un tel choix de  $\eta > 0$ .

2. On dit que  $f$  est continue à droite en  $x_0$  si et seulement si  $f$  admet une limite finie à droite en  $x_0$  et cette limite vaut  $f(x_0)$ . C'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 ; \forall x \in ]a, b[, x_0 < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

C'est la même chose que la continuité, mais on regarde seulement ce qui se passe à gauche (ou à droite) de  $x_0$ .

**Proposition 3.1.** *Une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en  $x_0$ .*

On peut caractériser la continuité en termes de suites.

**Théorème 3.1.** *La fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n)$  dans  $]a, b[$  qui converge vers  $x_0$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(x_0)$ .*

### 3.1.2 Continuité sur un intervalle

**Définition 3.4.** 1. Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . On dit que  $f$  est continue sur  $]a, b[$  si et seulement si elle est continue en chaque point de  $]a, b[$  (i.e.  $\forall x \in ]a, b[, f$  est continue en  $x$ ).

2. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty < a < b < +\infty$ . On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $]a, b[, f$  est continue à droite en  $a$  et  $f$  est continue à gauche en  $b$ .

3. Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty < a < b \leq +\infty$ . On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b[$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $]a, b[$  et  $f$  est continue à droite en  $a$ .

4. Soit  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty \leq a < b < +\infty$ . On dit que  $f$  est continue sur  $]a, b]$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $]a, b[$  et  $f$  est continue à gauche en  $b$ .

**Théorème 3.2** (théorème des valeurs intermédiaires). *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$ , alors toutes les valeurs comprises entre  $f(a)$  et  $f(b)$  sont atteintes. En particulier, si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont non nulles et de signes opposés (i.e. si  $f(a) \times f(b) < 0$ ) alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .*

**Preuve (par dichotomie).** Si  $f(a) = f(b)$ , on n'a rien à démontrer. On suppose donc que  $f(a) \neq f(b)$ . Prenons le cas  $f(a) < f(b)$  (le cas  $f(a) > f(b)$  se traitera de façon similaire). Soit  $y \in ]f(a), f(b)[$ . On pose  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ . On considère  $c = (a_0 + b_0)/2$ . Si  $f(c) = y$ , c'est terminé. Si  $f(c) < y$ , on pose  $a_1 = c$  et  $b_1 = b_0$ . Si  $f(c) > y$ , on pose  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = c$ . On reproduit ainsi cette procédure sur l'intervalle  $[a_1, b_1]$ . La procédure s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations si on tombe sur un intervalle tel que la valeur de  $f$  en son milieu soit  $y$ , auquel cas on a trouvé un point où  $f$  prend la valeur  $y$ . Si la procédure se poursuit indéfiniment, on engendre deux suites :  $(a_n)$  croissante,  $(b_n)$  décroissante, telles que

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Ce sont des suites adjacentes, elles convergent donc vers la même limite  $d$  qui est dans l'intervalle  $[a, b]$ . Et comme on a par construction

$$f(a_n) < y < f(b_n),$$

il suit par continuité de  $f$  que

$$f(d) \leq y \leq f(d).$$

Donc  $f(d) = y$  (ce qui implique en particulier que  $d \neq a$  et  $d \neq b$ ) et le théorème est démontré.  $\square$

*Remarque 3.1.* De manière générale, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Cependant, c'est seulement dans le cas où l'intervalle de départ est fermé borné que l'on sait préciser la nature de l'intervalle image.

**Théorème 3.3.** *L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné éventuellement réduit à un seul point.*

**Preuve.** On note

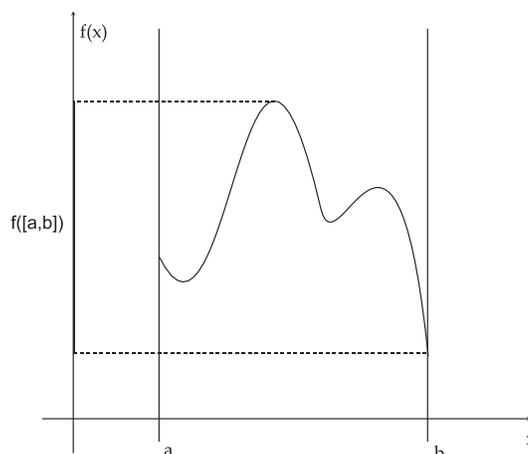
$$f([a, b]) = \{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Le fait que  $f([a, b])$  soit un intervalle est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. Maintenant,  $f([a, b])$  est fermé par continuité de  $f$  et par le théorème de Bolzano-Weierstrass. En effet, soit  $(v_n)$  une suite dans  $f([a, b])$  qui converge dans  $\mathbb{R}$ . On peut trouver une suite  $(u_n)$  dans  $[a, b]$  telle que  $f(u_n) = v_n$ . La suite  $(u_n)$  étant dans  $[a, b]$ , elle est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite  $(u_{n_k})$  convergente. Soit  $l$  sa limite. Par continuité de  $f$  on a

$$f(u_{n_k}) = v_{n_k} \rightarrow f(l) \in f([a, b])$$

et comme  $(v_n)$  converge dans  $\mathbb{R}$  toutes ses sous-suites convergent vers la même limite que  $(v_n)$ . Il suit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l) \in f([a, b]).$$

FIGURE 3.2 – Un cas où  $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$ .

Donc  $f([a, b])$  est fermé. Reste à voir que  $f([a, b])$  est borné. Supposons que  $f([a, b])$  ne soit pas borné, alors il existe une suite  $(v_n)$  dans  $f([a, b])$  qui tend vers l'infini. On peut trouver une suite  $(u_n)$  dans  $[a, b]$  telle que  $f(u_n) = v_n$ . La suite  $(u_n)$  étant dans  $[a, b]$ , elle est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite  $(u_{n_k})$  convergente. Soit  $l$  sa limite. On a alors une suite  $(u_{n_k})$  qui tend vers  $l \in [a, b]$  et telle que  $(f(u_{n_k}))$  diverge. Ceci contredit la continuité de  $f$  en  $l$ . Donc  $f([a, b])$  est borné et le théorème est démontré.  $\square$

**Attention !** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$ , l'image de  $[a, b]$  par  $f$ , notée  $f([a, b])$ , n'est pas nécessairement l'intervalle  $[f(a), f(b)]$  (voir figure 3.2).

Le théorème précédent signifie que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  possède sur  $[a, b]$  un minimum  $m$  et un maximum  $M$  et de plus, toutes les valeurs dans  $[m, M]$  sont atteintes, i.e.

$$\forall y \in [m, M], \exists x \in [a, b]; f(x) = y.$$

## 3.2 Dérivabilité

*Remarque 3.2.* Dorénavant, tous les intervalles seront supposés de longueur  $> 0$ , i.e. non vides et non réduits à un point.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application et  $x_0$  un point intérieur à  $I$  (i.e.  $\exists \eta > 0$  t.q.  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \subset I$ , autrement dit,  $x_0$  n'est pas un bord de  $I$ ).

**Définition 3.5.** On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si la quantité (définie sur  $I \setminus \{x_0\}$  qui désigne  $I$  privé du point  $x_0$ )

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .

Une façon équivalente d'exprimer cette définition est de dire que la quantité (définie pour  $h$  au voisinage de 0,  $h \neq 0$ )

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque  $h$  tend vers 0.

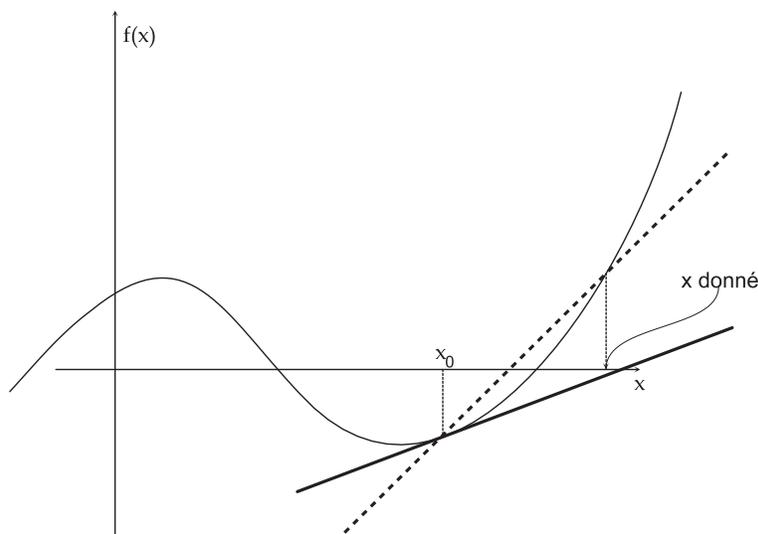


FIGURE 3.3 – Illustration graphique de la notion de nombre dérivé. La droite épaisse en pointillés joint les points  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x, f(x))$ . Sa pente est  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ . La limite de ces droites lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  est la tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $(x_0, f(x_0))$  (droite épaisse en trait plein). Sa pente est  $f'(x_0)$  d'après la définition 3.5.

Cette limite, lorsqu'elle existe, s'appelle le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  et on note

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

L'illustration graphique de cette définition (figure 3.3) montre que  $f'(x_0)$  est en fait la vitesse de croissance (autrement dit la pente) de la courbe  $y = f(x)$  au point  $x_0$ .

**Définition 3.6.** On dira que  $f$  est dérivable à gauche (resp. à droite) en  $x_0$  si et seulement si

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en  $x_0$ . Cela revient à dire que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en 0.

Si ces limites existent, on les appellera respectivement dérivée à gauche et dérivée à droite de  $f$  en  $x_0$  et on notera

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Le résultat suivant est immédiat mais important.

**Proposition 3.2.**  *$f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si :  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et  $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ .*

On sait de façon générale qu'une fonction d'une variable admet une limite en un point si et seulement si elle admet en ce point une limite à gauche et une limite à droite et ces deux limites sont égales. La proposition ci-dessus est l'expression de cette propriété pour la fonction de  $x$  :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Remarque 3.3.* Exemple typique d'une fonction dérivable à gauche et à droite en un point mais non dérivable en ce point :  $f(x) = |x|$ . On voit sur un dessin que  $f$  est dérivable à gauche et à droite en 0 et que  $f'_g(0) = -1$  et  $f'_d(0) = 1$ .

**Proposition 3.3.** *Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors elle est continue en  $x_0$  (la réciproque est fautive : cf.  $|x|$ ).*

*Preuve.* Pour  $x \neq x_0$ , on a :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0).$$

Lorsque  $x \rightarrow x_0$ , nous avons

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0) \text{ et } x - x_0 \rightarrow 0,$$

donc le produit de ces deux fonctions tend vers le produit des limites, c'est-à-dire 0. On en déduit donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

c'est-à-dire que  $f$  est continue en  $x_0$ . □

*Remarque 3.4.* De même nous avons

- $f$  dérivable à gauche en  $x_0 \implies f$  continue à gauche en  $x_0$ ,
- $f$  dérivable à droite en  $x_0 \implies f$  continue à droite en  $x_0$ .

**Définition 3.7** (Dérivabilité sur un intervalle). 1.  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , est dérivable sur  $]a, b[$  si et seulement si elle est dérivable en chaque point de  $]a, b[$ .

2.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty < a < b < +\infty$ , est dérivable sur  $[a, b]$  si et seulement si elle est dérivable en chaque point de  $]a, b[$ , dérivable à droite en  $a$  et dérivable à gauche en  $b$ .
3.  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , est dérivable sur  $[a, b[$  si et seulement si elle est dérivable en chaque point de  $]a, b[$  et dérivable à droite en  $a$ .
4.  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty \leq a < b < +\infty$ , est dérivable sur  $]a, b]$  si et seulement si elle est dérivable en chaque point de  $]a, b[$  et dérivable à gauche en  $b$ .

**Définition 3.8.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ . On appelle fonction dérivée de  $f$  la fonction notée  $f'$  définie sur  $I$  et qui à tout point  $x \in I$  associe  $f'(x)$  le nombre dérivé de  $f$  en  $x$ .

A noter que si  $I$  est de la forme  $[a, b]$  ou  $[a, b[$ , on donnera à  $f'$  la valeur  $f'_d(a)$  au point  $a$ .

De même, si  $I$  est de la forme  $]a, b]$  ou  $]a, b]$ , on définira la valeur de  $f'$  au point  $b$  comme étant  $f'_g(b)$ .

La fonction  $f'$  sera également notée  $\frac{df}{dx}$ .

**Proposition 3.4** (Opérations sur les fonctions dérivables). 1. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $x_0 \in I$ , soit deux applications  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

a. Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x_0$ , alors

—  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $x_0$  et

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

—  $fg$  est dérivable en  $x_0$  et

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

— Si  $f$  ne s'annule pas en  $x_0$ , alors  $1/f$  est définie au voisinage de  $x_0$ , dérivable en  $x_0$  et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

— Une conséquence immédiate des deux points précédents est que si  $g(x_0)$  est non nulle, alors  $f/g$  définie au voisinage de  $x_0$ , dérivable en  $x_0$  et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

b. Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ , alors

—  $\lambda f + \mu g$  est dérivable sur  $I$  et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

—  $fg$  est dérivable sur  $I$  et

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

— Si  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $1/f$  est définie et dérivable sur  $I$  et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}.$$

— Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f/g$  est définie et dérivable sur  $I$  et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

A noter que lorsque  $x_0$  est un bord de  $I$  dans le a., les dérivées s'entendent comme des dérivées à gauche ou à droite. b. est une conséquence directe de a.

2. Soit  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow J$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $x_0 \in I$  et  $y_0 = f(x_0)$ .

a. Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ , alors

—  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

— Si  $f : I \rightarrow J$  est bijective et si  $f'(x_0) \neq 0$ , alors la fonction réciproque de la fonction  $f$

$$f^{-1} : J \rightarrow I$$

est dérivable en  $f(x_0)$  et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

- b. Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $g$  dérivable sur  $J$ , alors  
 —  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'.$$

- Si  $f : I \rightarrow J$  est bijective et si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'} \text{ (fonction de } I \text{ dans } \mathbb{R}),$$

c'est-à-dire

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \text{ (fonction de } J \text{ dans } \mathbb{R}).$$

Si  $x_0$  est un bord de  $I$  ou  $y_0$  est un bord de  $J$  dans le a., les dérivées en ces points sont des dérivées à droite ou à gauche. a. implique naturellement b.

### Quelques démonstrations.

1.a. 2<sup>ème</sup> point. On écrit

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0)).$$

D'où

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= g'(x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0), \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).$$

□

1.a. 3<sup>ème</sup> point. On a  $f(x_0) \neq 0$ , de plus  $f$  est dérivable en  $x_0$ , donc continue en  $x_0$ , c'est-à-dire  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ . On en déduit donc :

$$\exists \eta > 0; \forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) \neq 0.$$

La fonction  $1/f$  est donc bien définie dans  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  et dans ce voisinage de  $x_0$ , on peut considérer

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{f(x_0)f(x)} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}. \quad (3.1)$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} &= \frac{1}{(f(x_0))^2}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} &= -f'(x_0), \end{aligned}$$

d'où (3.1) a une limite en  $x_0$  et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

□

1.a. 4<sup>ème</sup> point. On écrit simplement

$$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$$

et on applique les deux points précédents. □

2.a. 2<sup>ème</sup> point. On considère  $y \in J$ ,  $y \neq y_0$ . Soit  $x \in I$  l'unique antécédent de  $y$ , i.e.  $y = f(x)$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(y_0)}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \text{ lorsque } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

□

A noter que si on a oublié la formule de  $(f^{-1})'$ , on peut facilement la retrouver de la façon suivante : on écrit simplement que  $f^{-1}$  est la fonction réciproque de  $f$ , c'est-à-dire

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}, \text{ i.e. } \forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x.$$

On dérive les deux membres de l'égalité ci-dessus au point  $x_0$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \times f'(x_0) = 1 \text{ (dérivée de } x \mapsto x \text{ en } x_0).$$

Il suit

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ si } f'(x_0) \neq 0.$$

### Quelques exemples.

1. Dérivée de  $\sqrt{x}$ . La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

est bijective et sa dérivée  $f'(x) = 2x$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Sa fonction réciproque est :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Sa dérivée est donnée par :

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

et en posant  $y = f(x)$ , on trouve

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

2. Dérivée de la fonction  $\ln(x)$ . La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

est bijective et sa dérivée  $f' = f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Sa fonction réciproque est :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

Comme précédemment

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

c'est-à-dire

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}.$$

On introduit maintenant une notion naturelle : celle des dérivées successives.

**Définition 3.9.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point intérieur à  $I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Si la fonction  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en  $x_0$ , on notera  $f''(x_0)$  son nombre dérivé en  $x_0$  au lieu de  $(f')'(x_0)$  et on dira que  $f$  admet une dérivée seconde en  $x_0$ . De même, si  $f'$  est dérivable sur  $I$ , on notera  $f''$  sa fonction dérivée et on l'appellera la dérivée seconde de  $f$  sur  $I$ . Lorsque  $f''$  existe sur  $I$ , si elle est dérivable en  $x_0$  ou sur  $I$ , on note  $f'''(x_0)$  sa dérivée en  $x_0$ ,  $f'''$  sa dérivée sur  $I$  et on parle de dérivée troisième de  $f$  en  $x_0$  ou sur  $I$ . Par récurrence, on peut ainsi définir une infinité de dérivées successives, pourvu que chaque dérivée soit elle-même dérivable sur  $I$ . On notera  $f^{(n)}$  la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  si elle existe. En particulier, on a  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$ .

Un exemple de fonction admettant une infinité de dérivées successives sur  $\mathbb{R}$  est  $f(x) = x^2$ . On a  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$  et  $f^{(n)} \equiv 0$  sur  $\mathbb{R}$  pour  $n \geq 3$ .

**Proposition 3.5** (Formule de Leibnitz). Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et deux fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n$  fois dérivables sur  $I$ , où  $n \in \mathbb{N}$ . Alors le produit  $fg$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et la dérivée d'ordre  $n$  (aussi appelée dérivée  $n$ -ième) de  $fg$  est donnée par la formule

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

A noter que sous les hypothèses de la proposition, on a également pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  quelconques que  $\lambda f + \mu g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

**Preuve de la proposition.** On utilise simplement la formule pour la dérivée d'un produit et on raisonne par récurrence. On a

$$(fg)' = fg' + f'g$$

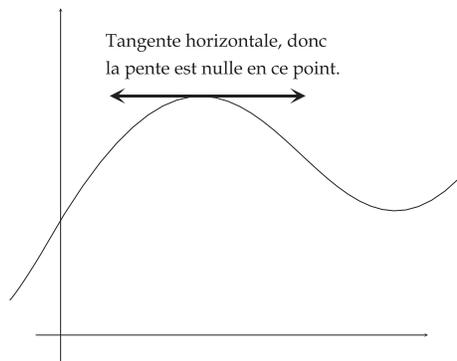


FIGURE 3.4 – Illustration de la proposition 3.6 dans le cas d'un maximum.

qui est la formule de Leibnitz pour  $n = 1$ . Supposons qu'elle soit vraie au rang  $n$ , on la dérive une fois de plus :

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)} &= \left( \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\
 &= \sum_{k=1}^n f^{(k)} (C_n^{k-1} g^{(n-k+1)} + C_n^k g^{(n-k+1)}) + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}. \quad \square
 \end{aligned}$$

### 3.3 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

**Proposition 3.6** (Extremum d'une fonction dérivable). *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point intérieur à  $I$ , soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  présente un extremum local en  $x_0$ , c'est-à-dire*

- ou bien  $f$  admet un maximum local en  $x_0$ , ce qui signifie

$$\exists \eta > 0; \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) \leq f(x_0),$$

- ou bien  $f$  admet un minimum local en  $x_0$ , ce qui signifie

$$\exists \eta > 0; \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) \geq f(x_0).$$

Si de plus  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

**Preuve dans le cas d'un maximum.** Pour  $x < x_0$ ,  $x \in I$ , si  $x$  est assez proche de  $x_0$ , on a  $f(x) \leq f(x_0)$ , d'où

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

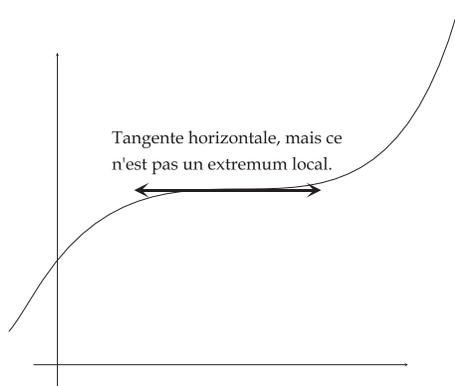
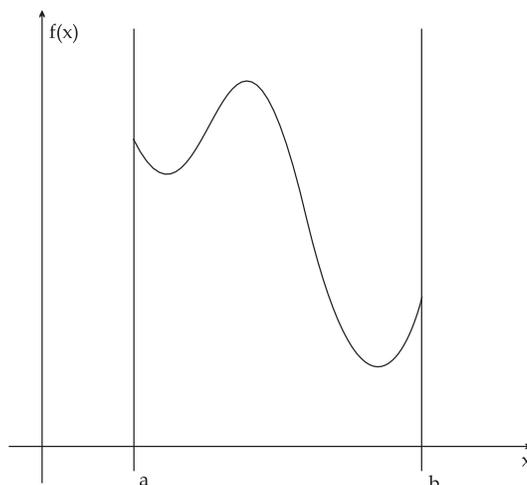


FIGURE 3.5 – Contre-exemple de la réciproque de la proposition 3.6.

FIGURE 3.6 – La fonction admet un extremum local en  $a$  mais  $f'_d(a) \neq 0$ . De même  $f$  admet un extremum local en  $b$  mais  $f'_g(b) \neq 0$ .

De même, pour  $x > x_0$ ,  $x \in I$ , si  $x$  est assez proche de  $x_0$ , on a  $f(x) \leq f(x_0)$ , d'où

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Et comme  $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$ , on a forcément  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

**Attention !** Si  $f$  admet un extremum local au bord de l'intervalle, la proposition ne s'applique plus (voir figure 3.6). D'autre part, une fonction peut admettre un extremum local en un point sans y être dérivable. Exemple : la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$  définie par  $f(x) = |x|$ . Elle admet un minimum local (et même global) en 0 et elle n'est pas dérivable en 0.

**Théorème 3.4** (Théorème de Rolle). *Soit la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $-\infty < a < b < +\infty$ . On suppose  $f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et que  $f(a) = f(b)$ . Alors, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .*

**Démonstration.** On a vu dans le théorème 3.3 que l'image par  $f$  de  $[a, b]$  est un intervalle fermé borné  $[m, M]$ ,  $m \leq M$ . Si  $m = M = f(a) = f(b)$ , alors  $f$  est constante sur  $[a, b]$  et donc

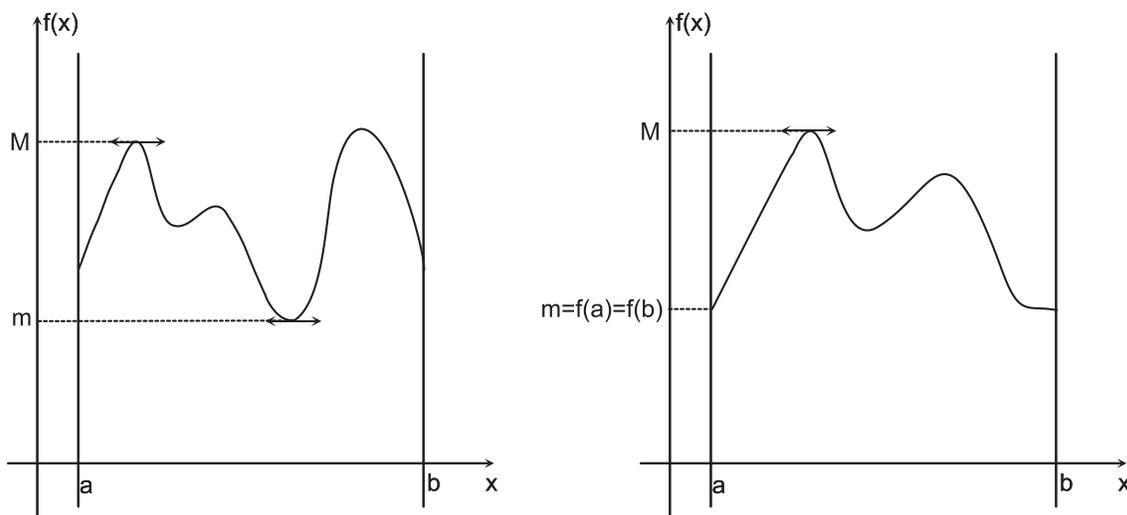


FIGURE 3.7 – Deux illustrations du théorème de Rolle.

$f'(x) = 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . Dans le cas contraire, au moins l'un des deux nombres  $m$  ou  $M$  est distinct de  $f(a) = f(b)$ ; ceci se décompose en deux cas :

- $m \neq f(a) = f(b)$ , i.e.  $m < f(a)$  car  $f(a) \in [m, M]$ . Alors  $f$  atteint la valeur  $m$  dans  $]a, b[$  car  $f(a) \neq m$  et  $f(b) \neq m$ . Soit  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = m$ . Alors  $f$  admet son minimum global (et donc un minimum local) en  $c$  et d'après la proposition 3.6, on a  $f'(c) = 0$ .
- $M \neq f(a) = f(b)$ , alors  $M > f(a) = f(b)$  et il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = M$ . La fonction  $f$  admet alors son maximum global (et donc un maximum local) en  $c$  et d'après la proposition 3.6, on a  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**Théorème 3.5** (Égalité des accroissements finis ou théorème des accroissements finis ou théorème de Lagrange). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Démonstration immédiate** : on applique le théorème de Rolle à la fonction

$$g(x) = f(x) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

### 3.3.1 Théorèmes associés

**Théorème 3.6** (Théorème de Cauchy). Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$  et  $g'(x) \neq 0 \forall x$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

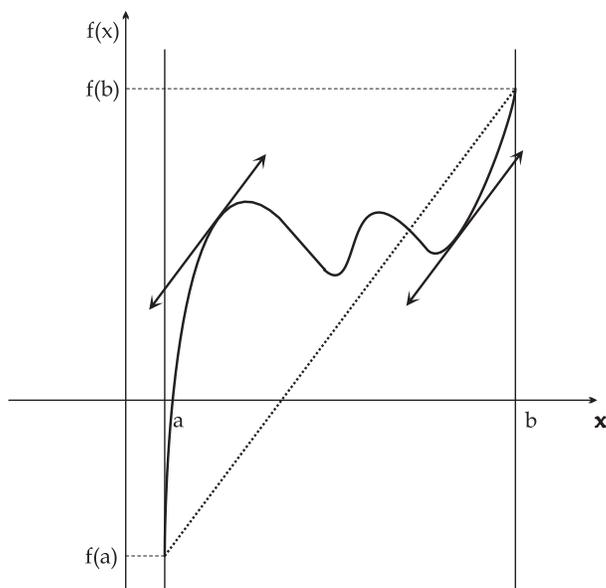


FIGURE 3.8 – Une illustration du théorème des accroissements finis. Le théorème dit qu'il existe un point intérieur à  $]a, b[$  en lequel la tangente au graphe de  $f$  est parallèle à la droite joignant  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ . Ici, il y en a quatre. On a représenté les deux correspondant au maximum et au minimum de  $g$  définie dans la démonstration.

**Démonstration.** D'après le théorème de Lagrange,  $\exists \bar{c}$  tel que

$$g'(\bar{c}) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \implies g(b) - g(a) = \underbrace{g'(\bar{c})}_{\neq 0} \underbrace{(b - a)}_{> 0} \neq 0, \quad (3.2)$$

donc on peut diviser par  $g(b) - g(a)$ . On définit la fonction  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (3.3)$$

Alors  $h$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  et on a (vérifier !)

$$h(a) = 0, \quad h(b) = 0.$$

On peut appliquer le théorème de Rolle, donc  $\exists c \in ]a, b[$  telque

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0. \quad (3.4)$$

C'est à dire :

$$0 = h'(c) = f'(c) - g'(c) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3.5)$$

□

*Remarque 3.5.* La condition sur la dérivée de  $g$  dans le théorème de Cauchy peut être relaxé. Ceci amène à la suivante version généralisée du théorème des accroissements finis.

**Théorème 3.7** (Théorème des accroissements finis généralisé). *Étant donné  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues en  $[a, b]$  et dérivables en  $]a, b[$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que*

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)$$

Pour le démontrer, on peut considérer la fonction  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec

$$h(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{pmatrix},$$

et appliquer le théorème de Rolle.

Nous avons vu que, comme conséquence du théorème de valeurs intermédiaires, l'image par une fonction continue d'une intervalle est un intervalle. Dans le contexte de la dérivabilité, on peut montrer le résultat suivant (que nous énonçons sans démonstration) :

**Théorème 3.8** (Darboux). *Étant donnée une fonction  $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivée d'une fonction  $f$ , alors son image  $f'[a, b]$  est un intervalle.*

*Remarque 3.6.* Noter que, dans le théorème de Darboux, la fonction  $f'$  n'est pas nécessairement continue (voir plus bas la notion de fonction de classe  $C^n$ ) : On sait que nécessairement  $f$  est continue (condition nécessaire pour la dérivabilité), mais pas nécessairement  $f'$ . Malgré ça, il le suffit d'être la dérivée d'une autre fonction pour que l'image d'un intervalle soit un intervalle.

**Corollaire 3.1** (L'Hôpital). *Si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont dérivables et  $g'(x) \neq 0$  dans un intervalle autour  $x_o$  et  $f(x_o) = 0 = g(x_o)$ , alors*

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3.6)$$

**Démonstration.** Nous pouvons définir,  $\forall x \in I, x \neq x_o$ , les fonctions  $f, g : [x_o, x] \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $]x_o, x[ \rightarrow \mathbb{R}$ ), et  $f$  et  $g$  satisfont les hypothèses du théorème de Cauchy, alors  $\exists c_x \in ]x_o, x[$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - \overbrace{f(x_o)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(x_o)}_{=0}} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (3.7)$$

Dans le dernier pas on utilise  $0 \leq |c_x - x_o| < |x - x_o|$ , donc  $\lim_{x \rightarrow x_o} c_x = x_o$  par les gendarmes.

*Remarque 3.7.* La condition  $f(x_o) = 0 = g(x_o)$  peut être relaxé à la condition  $f(x_o) = 0 = g(x_o)$  à  $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_o} g(x)$ . Ce condition (dans une version ouo dans une autre) est fondamentale dans le théorème de l'Hôpital. Si elle n'est pas satisfaite le théorème n'est pas vrai. C'est un erreur très commun de n'est pas la vérifier avant l'appliquer le théorème.

## 3.4 Conséquences du théorème des accroissements finis

### 3.4.1 Inégalité des accroissements finis

Il s'agit d'un autre théorème que l'on appelle aussi fréquemment "théorème des accroissements finis". Son avantage par rapport à l'égalité des accroissements finis est sa plus grande généralité. Il reste valable naturellement pour des fonctions à plusieurs variables (même si sa démonstration change sensiblement) alors que l'égalité des accroissements finis perd son sens dans ce cadre.

**Théorème 3.9** (Inégalité des accroissements finis).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{x \in ]a, b[} |f'(x)|.$$

**Preuve.** C'est une conséquence immédiate de l'égalité des accroissements finis.  $\square$

### 3.4.2 Condition suffisante de dérivabilité en un point

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point intérieur à  $I$ .

**Théorème 3.10.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $I$  et dérivable sur  $I \setminus \{x_0\}$ . On suppose que  $f'$ , définie sur  $I \setminus \{x_0\}$ , admet une limite finie  $l$  en  $x_0$ . Alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = l$ . Il suit donc également que  $f'$  est continue en  $x_0$ .

**Preuve.** D'après le théorème des accroissements finis,  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ ,  $\exists c_x$  strictement compris entre  $x$  et  $x_0$  tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Lorsque  $x \rightarrow x_0$ , on a  $c_x \rightarrow x_0$  et donc par hypothèse  $f'(c_x) \rightarrow l$ . Donc  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = l$ .  $\square$

### 3.4.3 Sens de variation d'une fonction

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ .

**Proposition 3.7.** 1.  $f$  est croissante sur  $I$  (au sens large) si et seulement si  $f' \geq 0$  sur  $I$ , i.e.  $\forall x \in I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .

2.  $f$  est décroissante sur  $I$  (au sens large) si et seulement si  $f' \leq 0$  sur  $I$ .

3.  $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $f' \equiv 0$  sur  $I$  (c'est une conséquence directe de 1. et 2. car  $f$  est constante si et seulement si  $f$  est croissante et décroissante).

4. Si  $f' \geq 0$  sur  $I$  et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

5. Si  $f' \leq 0$  sur  $I$  et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur  $I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

**Corollaire 3.2** (Condition suffisante d'extremum local). Soit  $x_0$  un point intérieur à  $I$ , on suppose que  $f'(x_0) = 0$ .

— S'il existe  $\eta > 0$  tel que  $f' < 0$  sur  $]x_0 - \eta, x_0[$  et  $f' > 0$  sur  $]x_0, x_0 + \eta[$ , alors  $f$  admet un minimum local strict en  $x_0$ .

— S'il existe  $\eta > 0$  tel que  $f' > 0$  sur  $]x_0 - \eta, x_0[$  et  $f' < 0$  sur  $]x_0, x_0 + \eta[$ , alors  $f$  admet un maximum local strict en  $x_0$ .

**Preuve du 1. de la proposition 3.7.** Supposons  $f$  croissante sur  $I$ . Alors pour tout  $x_0 \in I$ , on a

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ et donc } f'(x_0) \geq 0,$$

(on rappelle que si  $x_0$  est un point du bord,  $f'(x_0)$  représente une dérivée à gauche ou à droite en  $x_0$ ). Réciproquement, si  $f' \geq 0$  sur  $I$ , soit  $x, y \in I$  tels que  $x < y$ , alors par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in ]x, y[; f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Comme  $f' \geq 0$  sur  $I$ , on a  $f'(c) \geq 0$  et donc  $f(y) \geq f(x)$ . C'est-à-dire que pour tout  $x, y \in I$ , si  $x < y$  alors  $f(x) \leq f(y)$ . Autrement dit  $f$  est croissante sur  $I$ .  $\square$

### 3.4.4 Convexité

Par complétude, nous introduisons la notion de fonction convexe.

On rappelle qu'un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^2$  est convexe si tout segment d'extrémités dans  $E$  est complètement contenu dans  $E$ . On peut alors définir la notion de fonction convexe.

**Définition 3.10** (Fonction convexe). Si  $I$  est un intervalle, une fonction est dite convexe sur  $I$  si l'ensemble des points au-dessus de son graphe, c'est-à-dire l'ensemble  $C_f$

$$C_f = \{(x, y), x \in I \text{ et } y \geq f(x)\},$$

est un ensemble convexe. La fonction est concave si  $-f$  est convexe.

**Proposition 3.8** (Caractérisation de la convexité). *La propriété de convexité de  $C_f$  équivaut à demander que,  $\forall x_1, x_2 \in I$ , et  $\lambda \in [0, 1]$  :*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Dans le contexte de la dérivabilité, on peut caractériser la convexité d'une fonction avec la proposition suivante.

**Proposition 3.9.** *Soit  $I$  un intervalle et la fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  :*

- i) *On suppose  $f$  dérivable sur  $I$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si  $f'$  est une fonction croissante sur  $I$ .*
- ii) *On suppose  $f$  deux fois dérivable sur  $I$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si  $f'' \geq 0$ .*

Finalement on introduit la notion de point d'inflexion.

**Définition 3.11.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable, avec  $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue, et soit  $a$  un point intérieur à  $I$ . On dit que le graphe de  $f$  présente un point d'inflexion à  $a$ , s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $f$  soit convexe sur  $[a - \delta, a$  et concave sur  $[a, a + \delta]$  (ou concave sur  $[a - \delta, a$  et convexe sur  $[a, a + \delta]$ ). Par conséquent,  $f''$  change de signe en  $a$ , donc  $f''(a) = 0$ .

*Remarque 3.8.* La condition  $f''(a) = 0$  est une condition nécessaire pour avoir un point d'inflexion en  $a$ , mais elle n'est pas suffisante : par exemple, pour l'fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $f(x) = x^4$ , le point  $a = 0$  satisfait  $f''(a) = 0$ , mais c'est un minimum et pas un point d'inflexion.

## 3.5 Formules de Taylor

**Définition 3.12.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dira que  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ , pour un  $n \in \mathbb{N}$ , si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et si  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ . On dira aussi que  $f$  est  $n$  fois continûment dérivable sur  $I$ , ou que  $f$  est  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , ou de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ . On dit que  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$  si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La classe  $\mathcal{C}^0$  correspond simplement aux fonctions continues sur  $I$ .

**Définition 3.13.** Étant donné  $f$   $n$ -fois dérivable en  $x_o$  (intérieur d'un intervalle  $I$ ), on appelle polynôme de Taylor d'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_o$  au polynôme :

$$P_n(h; x_o) = f(x_o) + hf'(x_o) + \frac{h^2}{2!}f''(x_o) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_o) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_o)$$

**Propriété** (Développement de Taylor d'un polynôme). Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , alors pour  $x_o \in \mathbb{R}$  quelconque,  $P$  est égal à son polynôme de Taylor d'ordre  $n$  en  $x_o$ , i.e.

$$P(x_o + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}P^{(k)}(x_o) \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

et en particulier

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}P^{(k)}(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Démonstration immédiate.**  $P$  est un polynôme de degré  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , donc  $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et

$$P^{(k)} \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ pour } k \geq n + 1.$$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $n$  à  $P$  pour  $x_o \in \mathbb{R}$ ,  $h \in \mathbb{R}$  :

$$P(x_o + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}P^{(k)}(x_o) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n P^{(n+1)}(x_o + th) dt$$

et comme  $P^{(n+1)} \equiv 0$  sur  $\mathbb{R}$ , le reste intégral est nul. □

Dans le théorème suivant, nous allons énoncer les différentes versions de la formule de Taylor, dans l'esprit d'une étude locale au voisinage de  $x_o$ .

**Théorème 3.11.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_o$  un point intérieur à  $I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. **Formule de Taylor-Young.** On suppose que  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  et que  $f$  admet une dérivée  $(n + 1)$ -ième en  $x_o$ . Alors, pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x_o + h \in I$ , on a

$$f(x_o + h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_o) + h^{n+1}\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0,$$

c'est à dire

$$f(x_o + h) = P_{n+1}(h; x_o) + h^{n+1}\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (3.8)$$

2. **Formule de Taylor-Lagrange.** On suppose  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ , avec  $I = [a, b]$  et  $f$   $n + 1$ -fois dérivable dans  $]a, b[$ . Alors, pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x_o + h \in I$ ,  $h \neq 0$ , il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$f(x_o + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_o) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_o + \theta h), \quad (3.9)$$

c'est à dire

$$f(x_o + h) = P_n(h; x_o) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_o + \theta h). \quad (3.10)$$

3. **Formule de Taylor avec reste intégral.** On suppose que  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ , alors pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x_0 + h \in I$ , on a

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt, \quad (3.11)$$

*x'est à dire*

$$f(x_0 + h) = P_n(h; x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt.$$

*Remarque 3.9.* Avant donner la preuve, on peut faire plusieurs commentaires :

- i) C'est très important de noter les différences entre les hypothèses sur la régularité de  $f$  dans chaque version de la formule de Taylor. Dans l'énoncé du théorème, les formules de Taylor sont ordonnées en ordre croissant d'exigence sur les conditions de dérivabilité :
  - a) Taylor-Young demande que la fonction soit  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ , et que  $f$  admette une dérivée  $(n+1)$ -ième en  $x_0$ , mais pas dans le reste de  $I$ .
  - b) Taylor-Lagrange garde  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ , mais demande qu'elle soit  $n+1$ -fois dérivable dans un ouvert autour  $x_0$ , pas seulement en  $x_0$  (mais avec  $f^{(n+1)}$  pas nécessairement continue).
  - c) Finalement, Taylor avec le reste intégral demande en plus que  $f^{(n+1)}$  soit continue dans  $I$ .

En particulier, dans ce sens, on a l'ordre de force des hypothèses (avec les hypothèses les plus fortes vers la gauche) :

Hypothèses Taylor reste intégral  $\subset$  Hypothèses Taylor-Lagrange  $\subset$  Hypothèses Taylor-Young

Noter que dans le cas de la formule de Taylor-Young, le polynôme de Taylor est d'ordre  $n+1$ , au lieu de  $n$  pour les autres formules. Bien entendu, lorsque  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ , les trois formules peuvent être appliquées.

- ii) En demandant plus de régularité à la fonction  $f$  dans l'intervalle  $I$ , on gagne en contrôle sur l'erreur commise quand on arrondi la fonction, autour  $x_0$  par son polynôme de Taylor : avec Taylor-Young on demande le minimum à  $f$ , mais on peut conclure très peu sur l'erreur ; avec Taylor-Lagrange on gagne contrôle sur la forme de l'erreur, ce qui peut être utilisé pour majorer l'erreur et ainsi mieux estimer la fonction  $f$  ; finalement, avec la formule du reste intégrale on maximise le contrôle sur l'erreur en  $f$  : on le calcule.
- iii) On peut voir la formule de Taylor-Lagrange comme une généralisation à ordre supérieur du théorème des accroissements finis. En effet, elle est équivalente à la formulation suivante : on suppose que  $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$  et  $n+1$  dérivable dans  $]a, b[$ . Alors, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (3.12)$$

En particulier, pour  $n=0$  :  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ , c'est à dire  $f$  continue en  $[a, b]$ , et  $f$  dérivable en  $]a, b[$ , alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c), \quad (3.13)$$

qui est équivalent au Théorème (3.5).

iv) Finalement, remarquons que pour  $n = 0$ , la formule de Taylor avec reste intégral se réduit à

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \int_0^1 f'(x_0 + th) dt$$

et en posant  $x = x_0 + th$ ,  $dx = h dt$ , on se ramène au résultat du théorème fondamental du calcul, qu'on verra dans la chapitre suivant :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(x) dx .$$

Nous passons à montrer les formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Young (la preuve de Taylor avec reste intégral sera faite dans le chapitre suivant) dans le théorème 3.11.

**Preuve (Taylor-Young).** Sous les hypothèses du théorème, on doit montrer que

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - P_{n+1}(h; x_0)}{h^{n+1}} , \quad (3.14)$$

satisfait

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0 . \quad (3.15)$$

Pour ceci, on définit deux fonctions  $\phi, \psi : [-\alpha, \alpha]$ ,  $\alpha > 0$ , avec

$$\begin{aligned} \phi(h) &= f(x_0 + h) - P_{n+1}(h; x_0) \\ \psi(h) &= h^{n+1} . \end{aligned} \quad (3.16)$$

En particulier  $\phi, \psi \in \mathcal{C}^n([-\alpha, \alpha])$  et elles sont  $n + 1$ -fois dérivables en  $h = 0$ . À partir de l'expression

$$\phi(h) = f(x_0 + h) - \left( f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) \right) , \quad (3.17)$$

on peut vérifier

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(h) &= f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0)h \\ \psi^{(n)}(h) &= (n+1)!h . \end{aligned} \quad (3.18)$$

On peut alors écrire

$$\frac{\phi^{(n)}(h)}{\psi^{(n)}(h)} = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)}{h} - f^{(n+1)}(x_0) \right) . \quad (3.19)$$

Vue que  $f^{(n)}$  est dérivable en  $x_0$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi^{(n)}(h)}{\psi^{(n)}(h)} = \frac{1}{(n+1)!} \left( \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)}{h}}_{f^{(n+1)}(x_0)} - f^{(n+1)}(x_0) \right) = 0 . \quad (3.20)$$

D'autre part, les fonctions  $\phi^{(n-1)}$  et  $\psi^{(n-1)}$  satisfont :

- i)  $\phi^{(n-1)}$  et  $\psi^{(n-1)}$  sont dérivables en  $] - \alpha, \alpha[$ .
- ii)  $\phi^{(n-1)}(0) = 0 = \psi^{(n-1)}(0)$ .
- iii)  $(\psi^{(n-1)})' = \psi^{(n)} \neq 0$  dans  $] - \alpha, \alpha[\setminus \{0\}$ .

On est alors dans les conditions du théorème de L'Hôpital 3.1, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi^{(n-1)}(h)}{\psi^{(n+1)}(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi^{(n)}(h)}{\psi^{(n)}(h)} = 0 . \quad (3.21)$$

Si on répète le procès  $n - 1$  fois, on arrive à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{\psi(h)} = 0 \quad (3.22)$$

□

Avant donner la preuve de la formule de Taylor-Lagrange, on montre le lemme suivant.

**Lemme 3.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $\mathcal{C}^n([0, 1])$  et  $n + 1$  fois dérivable dans  $]0, 1[$ . Alors  $\exists \theta \in ]0, 1[$  tel que

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} . \quad (3.23)$$

**Preuve.** On considère la fonction  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\phi(x) = g(1) - \left( g(x) + g'(x)(1-x) + \frac{g''(x)}{2!}(1-x)^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(x)}{n!}(1-x)^n \right) . \quad (3.24)$$

La fonction  $\phi$  est continue en  $[0, 1]$  et dérivable en  $]0, 1[$ . Si on dérive une fois

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= - \left( g'(x) + g''(x)(1-x) + g'(x)(-1) + \frac{g'''(x)}{2!}(1-x)^2 + \frac{g''(x)}{2!}2(1-x)(-1) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{g^{(n+1)}(x)}{n!}(1-x)^n + \frac{g^{(n)}(x)}{n!}n(1-x)^n(-1) \right) \\ &= - \frac{g^{(n+1)}(x)}{n!}(1-x)^n , \quad \forall x \in ]0, 1[ . \end{aligned} \quad (3.25)$$

D'autre part, la fonction  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(x) = (1-x)^{n+1} , \quad (3.26)$$

est dérivable en  $[0, 1]$ , avec

$$\psi'(x) = -(n+1)(1-x)^n . \quad (3.27)$$

On est alors dans les conditions du théorème 3.7 des accroissements finis généralisé. Alors  $\exists \theta \in ]0, 1[$  tel que

$$(\phi(1) - \phi(0)) \psi'(\theta) = (\psi(1) - \psi(0)) \phi'(0) \quad (3.28)$$

On peut vérifier  $\phi(1) = 0 = \psi(1)$  et  $\psi(0) = 1$ , alors on a

$$-\phi(0)\psi'(\theta) = -\phi'(0) . \quad (3.29)$$

Autrement dit

$$\phi(0)(n+1)(1-\theta)^n = \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{n!}(1-\theta)^n, \quad (3.30)$$

donc (on a  $(1-\theta) \neq 0$ )

$$\phi(0) = \frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \quad (3.31)$$

et on récupère l'expression cherchée.  $\square$

Nous montrons maintenant la formule de Taylor-Lagrange.

**Preuve (Taylor-Lagrange).** Nous considérons Taylor-Lagrange, dans la forme qui généralise le théorème des accroissements finis.

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ , avec  $f$   $n+1$  fois dérivable en  $]a, b[$ . On considère la fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = f(a + t(b-a)). \quad (3.32)$$

En utilisant la règle de dérivation de fonctions composées (règle de dérivation en chaîne), avec  $g \in \mathcal{C}^n[0, 1]$  et  $n+1$ -fois dérivable, on peut vérifier

$$g^{(k)}(t) = (b-a)^k f^{(k)}(a + t(b-a)), \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.33)$$

En particulier

$$\begin{aligned} g^{(k)}(0) &= (b-a)^k f^{(k)}(a) \\ g(1) &= f(b) \\ g(0) &= f(a), \end{aligned} \quad (3.34)$$

et aussi

$$g^{(k)}(\theta) = (b-a)^k f^{(k)}(a + \theta(b-a)).$$

Si on substitue ces valeurs dans l'expression du lemme 3.5, on obtient

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta(b-a)) \quad (3.35)$$

Si maintenant on fait  $c = a + \theta(b-a) \in ]a, b[$ , on obtient le résultat cherché.  $\square$

## 3.6 Comparaison de fonctions

### 3.6.1 Au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

On considère  $\mathcal{D}$  un ensemble de la forme

$$\mathcal{D} = ]a - \alpha, a + \alpha[ \setminus \{a\}, \quad \alpha > 0,$$

c'est-à-dire un voisinage de  $a$  duquel le point  $a$  est enlevé. On considère deux fonctions  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Cela signifie que  $f$  et  $g$  sont définies près de  $a$  mais peuvent ne pas être définies en  $a$ .

**Définition 3.14.** 1. On dira que  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe  $\eta > 0$  et  $C > 0$  tels que

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ pour tout } x \in \mathcal{D} \text{ tel que } 0 < |x - a| < \eta.$$

On écrit  $f = O(g)$  au voisinage de  $a$ . Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , ceci est équivalent au fait que  $f/g$  soit bornée au voisinage de  $a$ .

2. On dira que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe une fonction  $\varepsilon : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On écrit  $f = o(g)$  au voisinage de  $a$ . Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , ceci est équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3. On dira que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe une fonction  $\varepsilon : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On écrit  $f \simeq g$  au voisinage de  $a$ . Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , ceci est équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

**Exemples :**

1.  $x^2 \sin(1/x) = O(x^2)$  au voisinage de 0. C'est évident car

$$|x^2 \sin(1/x)| \leq x^2 \quad \forall x \neq 0.$$

On est dans le cas où  $f/g$  n'a pas de limite en 0, en effet

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

2.  $x^3 = o(x^2)$  au voisinage de 0 car

$$\frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

3.  $1/x^2 = o(1/x^3)$  au voisinage de 0 car

$$\frac{1/x^2}{1/x^3} = x \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

4.  $x^3 + 2x^2 + 4 \simeq 4$  au voisinage de 0 car

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 4}{4} = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + 1 \rightarrow 1 \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

5.  $x^2 \sin(1/x) = O(x)$  au voisinage de 0 car

$$\left| \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right| \leq |x| \text{ pour } x \neq 0,$$

qui est bien borné au voisinage de 0. On a de plus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0,$$

c'est-à-dire  $x^2 \sin(1/x) = o(x)$  au voisinage de 0.

**Proposition 3.10.** 1. Si la fonction  $f/g$  admet une limite finie en  $a$ , alors  $f = O(g)$  au voisinage de  $a$ . La réciproque est fautive (voir premier exemple ci-dessus).

2.  $f = o(g)$  au voisinage de  $a \implies f = O(g)$  au voisinage de  $a$ .

3.  $f \simeq g$  au voisinage de  $a \implies f = O(g)$  au voisinage de  $a$ .

4. On suppose que  $f = O(g)$  au voisinage de  $a$ , alors on a les implications suivantes (les réciproques sont fautes) :

— Si  $g$  est bornée au voisinage de  $a$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ . À noter que  $f$  et  $g$  n'étant pas a priori définies en  $a$ ,  $g$  bornée au voisinage de  $a$  signifie :

$$\exists \eta > 0, \exists C > 0; \forall x \in \mathcal{D}, 0 < |x - a| < \eta \implies |g(x)| \leq C.$$

— Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

5. On suppose  $f = o(g)$  au voisinage de  $a$  et  $g$  bornée au voisinage de  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

6. La relation  $f \simeq g$  au voisinage de  $a$  est une relation d'équivalence, i.e. elle est réflexive, symétrique et transitive.

7. On suppose  $f \simeq g$  au voisinage de  $a$ . Si  $g$  admet une limite finie ou infinie en  $a$ , alors  $f$  admet une limite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

Cette proposition montre que la comparaison avec d'autres fonctions est un outil important pour connaître le comportement d'une fonction au voisinage d'un point.

**Démonstration.** La preuve de chacun des quatre points est à peu près immédiate. On en traite deux :

4. 2ème point.  $f = O(g)$  au voisinage de  $a$  signifie qu'il existe  $C > 0$  telle que pour  $x \in \mathcal{D}$  assez proche de  $a$ , on ait  $|f(x)| \leq C|g(x)|$ . Donc lorsque  $x$  tend vers  $a$ ,  $|f(x)|$  est comprise entre 0 et  $C|g(x)|$  qui tend vers 0. D'où,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

7.  $f \simeq g$  au voisinage de  $a$  signifie que, pour  $x \in \mathcal{D}$ ,

$$f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Soit  $l = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,  $l$  pouvant être finie ou infinie. Comme  $1 + \varepsilon(x) \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow a$ , on en déduit que  $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \rightarrow l$  lorsque  $x \rightarrow a$ . C'est-à-dire :  $f$  admet une limite en  $a$  et cette limite est  $l$ .

### 3.6.2 Au voisinage de $+\infty$

On considère un ensemble  $\mathcal{D}$  de la forme  $\mathcal{D} = ]A, +\infty[$ ,  $A \in \mathbb{R}$ , et deux fonctions  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 3.15.** 1.  $f = O(g)$  au voisinage de  $+\infty$  s'il existe  $B \geq A$  et  $C > 0$  tels que

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ pour } x > B.$$

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $+\infty$ , ceci est équivalent au fait que  $f/g$  soit bornée au voisinage de  $+\infty$ , c'est-à-dire au fait qu'il existe  $B \geq A$  et  $C > 0$  tels que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C \text{ pour } x > B.$$

2.  $f = o(g)$  au voisinage de  $+\infty$  s'il existe une fonction  $\varepsilon : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $+\infty$ , ceci est équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3.  $f \simeq g$  au voisinage de  $+\infty$  s'il existe une fonction  $\varepsilon : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $+\infty$ , ceci est équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Nous énonçons maintenant des propriétés analogues au cas de la comparaison au voisinage de  $a$  :

**Proposition 3.11.** 1. Si  $f/g$  admet une limite finie lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $f = O(g)$  au voisinage de  $+\infty$ . La réciproque est fausse.

2.  $f = o(g)$  au voisinage de  $+\infty \implies f = O(g)$  au voisinage de  $+\infty$ .

3.  $f \simeq g$  au voisinage de  $+\infty \implies f = O(g)$  au voisinage de  $+\infty$ .

4. On suppose  $f = O(g)$  au voisinage de  $+\infty$ . Alors

—  $g$  bornée au voisinage de  $+\infty \implies f$  bornée au voisinage de  $+\infty$ .

—  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

5. On suppose  $f = o(g)$  au voisinage de  $+\infty$ . Alors  $g$  bornée au voisinage de  $+\infty$  implique  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

6.  $\simeq$  est une relation d'équivalence, i.e. :

—  $f \simeq f$  toujours vrai,

—  $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f$ ,

—  $f \simeq g$  et  $g \simeq h \implies f \simeq h$ .

7. On suppose  $f \simeq g$  au voisinage de  $+\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ ,  $l$  pouvant être finie ou infinie. Alors,  $f$  admet une limite lorsque  $x \rightarrow +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

*Remarque 3.10.* On a les mêmes définitions et propriétés pour la comparaison de fonctions au voisinage de  $-\infty$ .

### Exemples :

1.  $\sin x = O(x)$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$  car  $|\sin x| \leq |x|$  pour tout  $x$ . On a même mieux :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

et donc  $\sin x = o(x)$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .

2.  $x^\alpha = o(e^x)$  au voisinage de  $+\infty$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , par le résultat classique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

3.  $e^x = o(x^k)$  au voisinage de  $-\infty$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , par le même résultat classique. En effet, en posant  $u = -x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-1)^k u^k e^{-u} = 0.$$

## 3.7 Développements limités

### 3.7.1 Définitions et propriétés

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point intérieur à  $I$  et une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 3.16.**  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$  s'il existe des nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  et une fonction  $\varepsilon$  définie au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$  tels que, pour tout  $h$  voisin de 0 dans  $\mathbb{R}$  tel que  $x_0 + h \in I$ , on ait

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + h^n \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Le polynôme

$$P(h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k$$

s'appelle la partie régulière du développement limité. Une façon équivalente d'écrire la relation précédente est :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n) \text{ au voisinage de } h = 0.$$

**Proposition 3.12** (Unicité du développement limité). *Les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  du développement limité à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$  sont uniques, c'est-à-dire : s'il existe des coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  et  $b_0, b_1, \dots, b_n$  tels que*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n) \text{ au voisinage de } h = 0$$

et

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n b_k h^k + o(h^n) \text{ au voisinage de } h = 0,$$

alors  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ .

**Preuve.** (Voir feuille d'exercices).

**Corollaire 3.3.** Si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$  et admet en  $x_0$  une dérivée d'ordre  $n + 1$ , alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n + 1$  en  $x_0$  et il est donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + h^{n+1} \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Il faut comprendre ce corollaire de la façon suivante : la formule de Taylor-Young donne l'existence d'un développement limité de  $f$  à l'ordre  $n + 1$  en  $x_0$  et la proposition 3.12 dit que c'est le développement limité de  $f$  à l'ordre  $n + 1$  en  $x_0$ .

**Corollaire 3.4.** On se place dans le cas  $x_0 = 0$  et on suppose que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

1. Si  $f$  est paire, alors  $a_k = 0$  pour tout  $k$  impair dans  $\{0, 1, \dots, n\}$ , i.e. la partie régulière du développement limité ne contient que des puissances paires de  $x$ .
2. Si  $f$  est impaire, alors  $a_k = 0$  pour tout  $k$  pair dans  $\{0, 1, \dots, n\}$ , i.e. la partie régulière du développement limité ne contient que des puissances impaires de  $x$ .

**Remarque 3.11.** 1. Si  $x_0$  n'est pas un point intérieur à  $I$  mais un bord de  $I$ , par exemple

(i)  $I = [a, b]$  et  $x_0 = a$ ,

(ii) ou encore  $I = ]a, b]$  et  $x_0 = b$ ,

on peut parler de développement limité à droite (pour le cas (i)) ou à gauche (pour le cas (ii)) en  $x_0$ .

2. On peut effectuer des développements limités au voisinage de l'infini. On considère une fonction  $f$  définie au voisinage de  $+\infty$  (resp. de  $-\infty$ ), c'est-à-dire sur un intervalle de la forme  $]B, +\infty[$ ,  $B > 0$  (resp.  $] - \infty, A[$ ,  $A < 0$ ). On définit une fonction  $g$  à partir de  $f$  par  $g(x) = f(1/x)$ . La fonction  $g$  est définie sur un intervalle de la forme  $]0, b[$ ,  $b = 1/B > 0$  (resp.  $]a, 0[$ ,  $a = 1/A < 0$ ). Un développement limité de  $g$  à l'ordre  $n$  à droite (resp. à gauche) en  $0$ , s'il existe, donnera un développement limité de  $f$  à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  (resp. de  $-\infty$ ). Plus précisément, si on a pour  $g$  :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ au voisinage de } 0 \text{ à droite (resp. à gauche),}$$

on en déduit pour  $f$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ au voisinage de } +\infty \text{ (resp. au voisinage de } -\infty).$$

## 3.7.2 Développements limité en 0 des fonctions élémentaires

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x),$$

$$\operatorname{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x),$$

$$\operatorname{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x),$$

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) + x^n \varepsilon(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x).$$

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  quelconque,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \\ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x),$$

d'où pour  $\alpha = 1/2$ ,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} x^n + x^n \varepsilon(x),$$

et pour  $\alpha = -1/2$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

**Exemple de développement limité à droite ou à gauche en 0 :** soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

Pour  $x \geq 0$ , on a

$$f(x) = \frac{1}{1+x};$$

donc  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  à droite en 0, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et il est donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \text{ pour } x \geq 0 \text{ et voisin de } 0.$$

Pour  $x \leq 0$ , on a

$$f(x) = \frac{1}{1-x};$$

donc  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  à gauche en 0, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et il est donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \text{ pour } x \leq 0 \text{ et voisin de } 0.$$

Comme les parties régulières de ces deux développements ne sont pas les mêmes pour  $n \geq 1$ , on en déduit que  $f$  n'admet pas de développement limité à l'ordre  $n \geq 1$  en 0.

**Exemple de développement limité au voisinage de  $+\infty$  :** soit la fonction  $f$  définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$$

La fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(1/x)$  est définie sur  $]0, 1[$  et vaut  $g(x) = 1/(1-x)$ . La fonction  $g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

Donc  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  pour tout entier naturel  $n$ , donné par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

### 3.7.3 Opérations sur les développements limités

#### Somme, produit et quotient

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Soit deux fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , admettant en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$  :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= P(h) + o(h^n) \quad , \quad P(h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n, \\ g(x_0 + h) &= Q(h) + o(h^n) \quad , \quad Q(h) = b_0 + b_1 h + \dots + b_n h^n. \end{aligned}$$

(Si  $x_0$  est un bord de  $I$ , il s'agit de développements limités à gauche ou à droite.)

—  $f + g$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$ , donné par :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) + g(x_0 + h) &= P(h) + Q(h) + o(h^n), \\ P(h) + Q(h) &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)h + \dots + (a_n + b_n)h^n. \end{aligned}$$

—  $fg$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$

$$f(x_0 + h)g(x_0 + h) = R(h) + o(h^n),$$

où le polynôme  $R(h)$  s'obtient en faisant le produit des polynômes  $P(h)$  et  $Q(h)$  et en ne gardant que les termes de degré  $\leq n$ .

— On suppose de plus que  $a_0 \neq 0$ , i.e.  $f$  admet une limite non nulle en  $x_0$ . Alors la fonction  $1/f$  est définie au voisinage de  $x_0$  dans  $I$  et admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$ . On l'obtient de la façon suivante : on pose

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= a_0(1 + \varphi(h)) \\ \text{avec } \varphi(h) &= \frac{1}{a_0}(a_1h + \dots + a_nh^n) + o(h^n) \\ &= S(h) + o(h^n). \end{aligned}$$

Comme  $\varphi(h) = O(h)$  au voisinage de  $h = 0$ , on peut écrire

$$\frac{1}{1 + \varphi(h)} = 1 - \varphi(h) + (\varphi(h))^2 - \dots + (-1)^n (\varphi(h))^n + o((\varphi(h))^n)$$

et on en déduit le développement de  $1/f$  en ne gardant dans le développement ci-dessus que les termes non négligeables devant  $h^n$  ; plus précisément, on a

$$\frac{1}{f(x_0 + h)} = \frac{1}{a_0}T(h) + o(h^n) \text{ au voisinage de } h = 0$$

où le polynôme  $T(h)$  s'obtient en ne conservant dans le polynôme

$$1 - S(h) + (S(h))^2 - \dots + (-1)^n (S(h))^n$$

que les termes de degré  $\leq n$ .

— On suppose que  $b_0 \neq 0$ , alors la fonction  $f/g$  est définie au voisinage de  $x_0$  dans  $I$  et admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$ . Pour l'obtenir, on commence par calculer celui de  $1/g$  par la méthode ci-dessus, puis on en déduit celui du produit  $f \times (1/g) = f/g$  en appliquant la règle de calcul du développement limité d'un produit.

### Composition

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , on considère deux fonctions  $f : I \rightarrow J$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $x_0 \in I$  et  $y_0 = f(x_0) \in J$ . On suppose que  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$  et que  $g$  admet en  $y_0$  un développement limité à l'ordre  $n$ , donnés par :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= P(h) + o(h^n) \quad , \quad P(h) = y_0 + a_1h + \dots + a_nh^n, \\ g(x_0 + \xi) &= Q(\xi) + o(\xi^n) \quad , \quad Q(\xi) = b_0 + b_1\xi + \dots + b_n\xi^n. \end{aligned}$$

Alors  $g \circ f$  admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$

$$g(f(x_0 + h)) = R(h) + o(h^n)$$

où le polynôme  $R(h)$  s'obtient en ne conservant dans le polynôme

$$b_0 + b_1(a_1h + \dots + a_nh^n) + \dots + b_n(a_1h + \dots + a_nh^n)^n$$

que les termes de degré  $\leq n$ .

**Intégration, dérivation**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$  :

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors elle admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n + 1$ , donné par :

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} h^{k+1} + o(h^{n+1}).$$

**Attention !** Dans le cas où  $n \geq 1$ , si  $f$  dérivable sur  $I$  et admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$ , cela ne suffit pas pour assurer que  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n - 1$  en  $x_0$ . En revanche, si on sait que  $f$  est dans  $\mathcal{C}^1(I)$  et que  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n - 1$  en  $x_0$  (c'est le cas par exemple si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ ), alors le développement limité de  $f'$  est donné par :

$$f'(x_0 + h) = a_1 + 2a_2h + \dots + na_nh^{n-1} + o(h^{n-1}).$$



# Chapitre 4

## Introduction à l'intégrale de Riemann

La théorie de l'intégration de Riemann date du milieu du XIXe siècle. Elle est due au mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866), aussi auteur d'un renouvellement complet de la géométrie maintenant appelé géométrie Riemannienne et qui a permis à Einstein de développer la théorie de la relativité générale. Cette théorie de l'intégration est facile à construire à l'aide du procédé dit des sommes de Riemann, basées sur une discrétisation de l'intervalle d'intégration. Cependant, son cadre d'application est assez limité (la construction de l'intégrale est naturelle essentiellement pour les fonctions continues) et les théorèmes de convergence sous le signe intégral sont compliqués à démontrer et à appliquer. Une théorie de l'intégration beaucoup plus puissante apparaîtra au début du XXe siècle avec l'intégrale de Lebesgue, basée sur une discrétisation de l'ensemble des valeurs des fonctions intégrées, plutôt que de l'ensemble sur lequel on intègre. La théorie de Kurzweil-Henstock, introduite autour de 1950, est à peu près aussi simple à définir que la théorie de Riemann et est aussi puissante que la théorie de Lebesgue.

Dans ce cours nous présentons une introduction à l'intégral de Riemann pour des fonctions bornées définies sur un intervalle fermé et borné. Nous énonçons les résultats sans démonstration.

### 4.1 Intégrale de Riemann

#### 4.1.1 Partitions d'un intervalle

**Définition 4.1** (Partition d'intervalle). Soit  $I = [a, b]$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ . On dit que  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$  est une partition de  $[a, b]$  si  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  et  $x_{i-1} < x_i$  pour  $i_1, \dots, n$ . L'ensemble de toutes les partitions de  $[a, b]$  est noté par  $\mathcal{P}[a, b]$ .

Soit  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ . On définit la norme  $\delta(P)$  de la partition  $P$  comme

$$\delta(P) = \max\{x_i - x_{i-1} ; i \in \{1, \dots, n\}\} \quad (4.1)$$

Soient  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  et  $\mathcal{P}' = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ , avec  $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$ . On définit la partition union de  $P$  et  $P'$  comme

$$P \cup P' = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \dots, y_n\} . \quad (4.2)$$

On peut vérifier :  $\delta(P \cup P') \leq \min\{\delta(P), \delta(P')\}$  .

Soient  $P, P' \in \mathcal{P}[a, b]$ .  $P'$  est plus fine que  $P$  si  $P \subset P'$ . En particulier, à partir de  $P$  et  $P'$  on construit la partition plus fine  $P \cup P'$

### 4.1.2 Fonction intégrable au sens de Riemann

**Définition 4.2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée, c'est-à-dire,  $\sup\{|f(x)| ; [a, b] < \infty\}$ , et soit  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ . On définit la “somme supérieur”  $S(f, P)$  de  $f$  avec la partition  $P$  comme :

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})M_i, \quad \text{avec } M_i = \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad (4.3)$$

et la somme inférieure comme

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})m_i, \quad \text{avec } m_i = \inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \quad (4.4)$$

On définit l'intégrale inférieure de  $f$  comme

$$\int_a^b f = \sup\{s(f, P), P \in \mathcal{P}[a, b]\}, \quad (4.5)$$

et l'intégrale supérieure de  $f$  comme

$$\overline{\int_a^b f} = \inf\{S(f, P), P \in \mathcal{P}[a, b]\}, \quad (4.6)$$

Noter que  $\int_a^b f$  et  $\overline{\int_a^b f}$  existent grâce au principe de la borne supérieure (inférieure), en utilisant que  $f$  est bornée.

**Théorème 4.1.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée et  $P$  et  $P' \in \mathcal{P}[a, b]$ , de telle manière que  $P'$  est plus fine que  $P$ . Alors

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq S(f, P') \leq S(f, P) \quad (4.7)$$

**Exemple 4.1.** Nous donnons un exemple dans lequel les intégrales supérieures et inférieures ne coïncident pas. En effet, si on considère la “fonction de Dirichlet”  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  avec

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (4.8)$$

On a alors

$$\int_0^1 f = 0, \quad \overline{\int_0^1 f} = 1 \quad (4.9)$$

**Définition 4.3.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. On dit que  $f$  est intégrable au sens de Riemann (ou, simplement, intégrable Riemann) si

$$\int_a^b f = 0 = \overline{\int_a^b f} \quad (4.10)$$

Cette valeur commune est notée par

$$\int_a^b f. \quad (4.11)$$

*Remarque 4.1.* Comme notation, quand il y a une ambiguïté à propos de la variable sur laquelle on fait l'intégration, on peut écrire

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx \quad (4.12)$$

Notez que, ici, le symbol  $dx$  est simplement un notation convenable, et pas un objet mathématique "per se".

Nous dénoterons l'ensemble de fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bornées et intégrables Riemann par  $\mathcal{R}[a, b]$

### 4.1.3 Critère de convergence

**Théorème 4.2** (Critère de convergence). *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée.  $f$  est intégrable si et seulement si  $\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}[a, b]$  tel que*

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon. \quad (4.13)$$

**Exemple 4.2** (Application critère de convergence). On étudie le cas de la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  avec, avec  $f(x) = x$ . On considère  $P_n \in \mathcal{P}[0, 1]$ , donné par

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

On peut écrire pour  $S(f, P)$  et  $s(f, P)$

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})M_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i \\ s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

En utilisant que  $f$  est croissante

$$\begin{aligned} M_i &= \sup \left\{ f(x), x \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \right\} = \frac{i}{n} \\ m_i &= \inf \left\{ f(x), x \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \right\} = \frac{i-1}{n} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Alors

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ s(f, P_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

En prenant la différence

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n (i-1) \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{1}{n} \quad (4.18)$$

Vu que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , on a que  $\forall \epsilon > 0 \exists n_o$  tel que  $\forall n \geq n_o$ , on a  $\frac{1}{n} < \epsilon$ . C'est à dire,  $\exists n_o$  tel que  $\forall n \geq n_o$  la partition  $P_n$  satisfait

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) < \epsilon. \quad (4.19)$$

Alors, par le théorème 4.2,  $f$  est intégrable.

## 4.2 Résultats sur l'intégration

### 4.2.1 Intégrabilité, continuité et monotonie

En appliquant le critère d'intégrabilité 4.2, on peut montrer les résultats suivants pour fonctions continues et monotones.

**Théorème 4.3** (Intégration et continuité). *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée. Si  $f$  est continue, sauf dans un nombre fini de points, alors elle est intégrable.*

**Théorème 4.4** (Intégration et monotonie). *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée. Si  $f$  est monotone, alors elle est intégrable.*

Ces théorèmes donnent certaines conditions suffisantes, mais clairement pas nécessaires, comme c'est illustré dans l'exemple suivant.

**Exemple 4.3** (Exemple de fonction intégrable, non continue et non monotone). On considère la fonction  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  avec

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (4.20)$$

La fonction  $f$  n'est pas continue et n'est pas monotone. On va montrer qu'elle néanmoins est intégrable en appliquant le critère de convergence du Théorème 4.2.

Soit  $\epsilon > 0$ , on prend  $P \in \mathcal{P} \setminus [0, 3]$ , avec

$$P_n = \left\{ 0, \frac{3}{n}, \frac{3 \cdot 2}{n}, \dots, \frac{3(n-1)}{n}, 3 \right\}. \quad (4.21)$$

On peut vérifier

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n M_i \\ s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned} \quad (4.22)$$

Sur tous les intervalles on a  $M_i = m_i = 1$  ou  $M_i = m_i = 2$ , sauf si  $x_i = 1$  ou  $x_i = 2$  appartiennent à un intervalle, dans ce cas  $M_i = 2$  et  $m_i = 1$ . Alors

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \leq \frac{3}{n} ((2-1) + (2-1)) = \frac{6}{n} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Alors, on peut choisir  $n_\epsilon$  tel que  $\forall n \geq n_\epsilon$ , on a  $\frac{6}{n} < \epsilon$ , c'est à dire

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) < \epsilon, \quad (4.24)$$

et  $f$  est intégrable par Théorème 4.2.

Pour des fonctions continues, on a le théorème suivant qui proportionne une espèce de version intégrale du théorème des accroissements finis.

**Théorème 4.5** (Valeur moyenne du calcul intégral). *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continue. Alors  $\exists c \in [a, b]$  tel que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a) . \quad (4.25)$$

Une version généralisée de ce théorème, particulièrement importante dans le contexte de théorie de la mesure est la suivante.

**Théorème 4.6.** *Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continue,  $g$  intégrable et  $g(x) > 0, \forall c \in [a, b]$ . Alors  $\exists c \in [a, b]$  tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx \quad (4.26)$$

L'expression  $d\mu(x) = g(x)dx$  proportionne une "mesure".

### 4.2.2 Intégrabilité et opérations sur les fonctions

On énonce à continuation le fait que l'ensemble de fonctions intégrables sur  $[a, b]$ , c'est à dire  $\mathcal{R}[a, b]$  est un espace linéaire.

**Théorème 4.7.** *Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions intégrables, et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors  $f + g$  and  $\alpha f$  sont intégrables.*

*De plus*

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)dx &= \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \\ \int_a^b \alpha f dx &= \alpha \int_a^b f dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

*C'est à dire, l'opérateur  $\int_a^b : \mathcal{R}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire.*

De plus, on peut partitionner l'intégrale sur un intervalle en termes de plusieurs sous-intervalles

**Théorème 4.8.** *Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et soit  $c \in ]a, b[$ . Alors,*

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx \quad (4.28)$$

Les inégalités intégrales sont d'une grande importance pour obtenir de bornes et estimations dans le contexte de l'intégrabilité. Le théorème donne quelques inégalités intégrales de base

**Théorème 4.9.** *Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions intégrables. Alors*

- i)  $f \cdot g$  est intégrable.*
- ii) Si  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ , alors  $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ .*
- iii)  $\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$ .*

iv) *Inégalité de Schwarz :*

$$\left( \int_a^b f \cdot g dx \right) \leq \left( \int_a^b f^2 dx \right) \cdot \left( \int_a^b g^2 dx \right) . \quad (4.29)$$

v) *Inégalité de Minkowski :*

$$\left( \int_a^b (f + g)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_a^b g^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (4.30)$$

À continuation on énonce théorème de grande importance, non seulement conceptuelle, mais aussi pratique dans le contexte de composition de fonctions, qu'on peut voir comme changements de variables.

**Théorème 4.10** (Changement des variables). *Soit  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Soit un changement de variable sur  $[a, b]$ , c'est-à-dire une application  $\phi : J \rightarrow [a, b]$  bijective et de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $\phi'$  ne s'annulant pas sur  $J$ . On note  $c = \phi^{-1}(a)$  et  $d = \phi^{-1}(b)$ , c'est-à-dire que l'intervalle  $J$  est  $[c, d]$  si  $\phi$  est croissante et  $[d, c]$  si  $\phi$  est décroissante. Alors on a*

$$\int_a^b f(y) dy = \int_c^d f(\phi(x)) \phi'(x) dx .$$

Autrement dit

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y) dy = \int_c^d f(\phi(x)) \phi'(x) dx .$$

Un point important, parfois négligé dans les applications, et le caractère bijective de  $\phi$  dans ce théorème de changement de variables. Si on néglige ce point, on peut construire facilement des exemples illustrant de contradictions apparentes dans les évaluations des intégrales.

### 4.3 Intégration et dérivation

Un des chapitres le plus importantes de la notion d'intégrale et sa relation avec la dérivabilité de fonctions. Dans cette section, nous donnons les éléments de cette relation fondamentale.

**Définition 4.4** (Intégrale indéfinie). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. On peut définir la fonction  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (4.31)$$

La fonction  $F$  est appelée "fonction intégrale" ou "intégrale indéfinie".

Le théorème suivant nous dit que l'intégrale indéfinie est continue, même si  $f$  ne l'est pas. Dans ce sens, l'intégration "améliore" la régularité des fonctions.

**Théorème 4.11.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. Alors la fonction intégrale  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est continue.*

Si, en plus,  $f$  est continue, alors l'intégrale indéfinie n'est pas seulement continue mais aussi dérivable, et sa dérivée coïncide avec  $f$ . C'est le contenu du théorème suivant, aussi connu comme "première théorème fondamental du calcul".

**Théorème 4.12** (Premier théorème fondamental du calcul). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et  $x_o \in ]a, b[$ , tel que  $f$  est continue en  $x_o$ . Alors l'intégrale indéfinie  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , où

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad (4.32)$$

est dérivable en  $x_o$  avec  $F'(x_o) = f(x_o)$ .

*Remarque 4.2.* Le théorème 4.12 peut être lu en disant que toute fonction continue dans un intervalle et la dérivée d'une autre fonction.

De manière plus générale, la définition suivante introduit la notion de "primitive" (ou "anti-dérivée") d'une fonction.

**Définition 4.5** (Primitive d'une fonction). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  admet une primitive s'il existe  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue en  $[a, b]$ , telle que  $G$  est dérivable en  $]a, b[$  avec

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a, b[ \quad (4.33)$$

On dit que  $G$  est une primitive de  $f$ .

Noter que la primitive n'est pas unique. En particulier, si  $G$  est une primitive alors  $G + c$ , avec  $c$  une fonction constante, est aussi une primitive.

*Remarque 4.3.* Noter que la notion de primitive ne fait participer nulle part la notion d'intégration. La primitive, à priori, est une notion à part l'intégrabilité. Ce que le théorème 4.12 nous dit est que, si  $f$  est continue, alors elle admet une primitive qui est donnée par son intégrale indéfinie.

Mais le réciproque n'est pas vrai : on peut trouver des fonctions qui admettent des primitives et, pourtant ne sont pas continues. Alors, la primitive associée ne se suit du théorème 4.12.

**Exemple 4.4** (Fonction non continue qui admet une primitive). Si on considère une fonction dérivable, mais pas de classe  $\mathcal{C}^1$ , sa dérivée  $f'$  admet une primitive par construction, notamment la fonction  $f$ , mais elle même n'est pas dérivable.

De manière explicite, considérons la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $a < 0$  et  $b > 0$  donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

Cette fonction n'est pas continue en  $x_o$ , alors on ne peut pas utiliser le théorème 4.12 pour construire une primitive, mais elle est en fait la dérivée de la fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

La fonction  $g$  est dérivable partout, mais elle n'est pas  $\mathcal{C}^1$ , car sa dérivée  $g'$  n'est pas continue en  $x = 0$ . On peut conclure que  $g$  est une primitive de  $f$ , car  $g' = f$ , et au même temps  $f$  n'est pas continue.

Finalement, on donne la relation entre la primitive (ou antiderivée) d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$  et son intégrale (sur  $[a, b]$ , alors un nombre réel, pas l'intégrale définie). Ce théorème est une pièce clé dans l'analyse.

**Théorème 4.13** (Règle de Barrow of deuxième théorème fondamental du calcul). *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une primitive de  $f$ . Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) . \quad (4.36)$$

*Remarque 4.4.* Noter que  $f$  n'est pas nécessairement continue. Si elle continue, on sait par le théorème 4.12 qu'elle admet une primitive, et on peut appliquer l'expression (4.36). Mais il suffit que  $f$  admette une primitive pour appliquer (4.36), même si elle n'est pas continue.

*Remarque 4.5.* Ce théorème est le cas en dimension  $n = 1$  d'un théorème plus générale en dimension arbitraire, le théorème de Stokes, qui relie l'intégrale d'un certain "objet"  $df$  dans un "volume"  $n$ -dimensionnel  $D$  avec l'intégrale de sa "primitive"  $f$  (définie dans le sens approprié) dans la frontière  $\partial D$ , notamment un "volume"  $(n - 1)$ -dimensionnel

$$\int_D df = \int_{\partial D} f \quad (4.37)$$

Dans le cas de la règle de Barrow,  $D = [a, b]$  et  $\partial D$  est  $\{a\} \cup \{b\}$ .

Le théorème 4.13 a une conséquence directe de grande utilité pratique, notamment l'intégration par parties.

**Théorème 4.14** (Intégration par parties). *Soit  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . Alors*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx ,$$

où

$$[f(x)g(x)]_a^b$$

est la variation de la fonction  $fg$  entre les bornes  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire

$$[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) .$$

**Preuve.** On écrit simplement que

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \\ &= \int_a^b (fg)'(x)dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) = [f(x)g(x)]_a^b . \quad \square \end{aligned}$$

En ce point, on est en conditions de compléter la preuve du théorème 3.11, avec la dérivation de la formule de Taylor avec reste intégral dans le théorème de Taylor. On rappelle son énoncé

**Proposition 4.1** (Formule de Taylor avec reste intégral). *Étant donnée un intervalle  $I$ , on suppose que  $f \in C^{n+1}(I)$ , alors pour tout  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $x_0 + h \in I$ , on a*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt , \quad (4.38)$$

c'est à dire

$$f(x_0 + h) = P_n(h; x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt . \quad (4.39)$$

**Preuve.** On commence par ré-écrire le reste intégral sous une forme qui facilitera la démonstration. On fait le changement de variable  $s = x_0 + th$  : on obtient

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) dt = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0 + h - s)^n f^{(n+1)}(s) ds.$$

En posant  $x = x_0 + h$ , la formule devient

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

La formule se vérifie par récurrence sur  $n$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[x_0, x]$ , le théorème fondamental de l'analyse affirme

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt,$$

c'est la formule pour  $n = 0$ .

Si la formule est vraie pour  $n$  et si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+2}$  sur  $[x_0, x]$ , par intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^x \\ &\quad - \int_{x_0}^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

ce qui implique

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt.$$

O, en déduit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

ce qui est précisément la formule pour  $n + 1$ . □