2016/17

Mathématiques Math21 (Analyse 2)

Examen Final (17 mai 2017)

Temps : 2h00

Question 1 : [5 points]

i) Énoncer le théorème des accroissements finis. **[1 point]**

i) Énoncer la formule de Taylor-Lagrange et justifier son interprétation comme une généralisation du théorème des accroissements finis. **[1 point]**

ii) Calculer $\cos(-1)$ avec une erreur ϵ tel que $|\epsilon| < 10^{-5}$. **[3 points]**

Question 2 : [5 points]

Étant donnée $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{e^x \sin(x)} \cos(t) t^2 dt \ .$$

i) Justifier que F est dérivable. **[2.5 points]**

ii) Évaluer sa dérivée. **[2.5 points]**

Question 3 : [4 points]

Étant donnée l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' + 2y = 2\cos x \ , \tag{1}$$

i) Trouver la solution générale de l'équation homogène associée à (1). **[1 point]**

ii) Trouver une solution particulière de l'équation complète (1). **[1 point]**

iii) Trouver la solution générale de l'équation complète (1). **[1 point]**

iv) Trouver la solution particulière à (1) avec conditions initiales : $y(0) = 1, y'(0) = 0$. **[1 point]**

Question 4 : [6 points]

i) Étant donnée la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ , x \neq 0 \ , \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. **[1.5 points]**

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. **[1.5 points]**

c) Est-ce que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? Le justifier. **[1 point]**

ii) Construire (quand cela est possible) :

a) Une fonction non continue qui admet une primitive. **[0.5 point]**

b) Une fonction bornée non-intégrable (Riemann). **[0.5 point]**

c) Une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante, dérivable et non-bornée. **[1 point]**

Justifier vos réponses.