2017/18

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

Examen Final (16 mai 2018)

Temps : 2h00

Question 1 : [4 points]

Étant donnée la fonction $f :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, avec $f(x) = \tan(x)$:

i) Justifier que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée. **[1 point]**

ii) Étant donnée l'équation

$$x^2 e^{\frac{2}{\pi}\arctan(x)} = 2 \ , \tag{1}$$

où $\arctan(x) = f^{-1}(x)$:

a) Montrer que l'équation (1) admet au moins une solution dans $[0, +\infty[$. **[2 points]**

b) Montrer que cette solution est unique. **[1 point]**

Question 2 : [5 points]

Étant donnée $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{e^{\sin^2(x)}} \ln(1+t)\arctan(t)dt \ .$$

i) Justifier de manière détaillée que F est dérivable. **[2.5 points]**

ii) Évaluer sa dérivée. **[2.5 points]**

Question 3 : [5 points]

Étant donnée l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' - 3y = 2\sin x \ , \tag{2}$$

i) Trouver la solution générale de l'équation homogène associée à (2). **[1.5 points]**

ii) Trouver une solution particulière de l'équation complète (2). **[1.5 points]**

iii) Trouver la solution générale de l'équation complète (2). **[1 point]**

iv) Trouver la solution particulière à (2) avec conditions initiales : $y(0) = 1, y'(0) = 0$. **[1 point]**

Question 4 : [6 points]

i) Énoncer la notion de fonction de classe $C^n([a, b])$. **[1 point]**

ii) Étant données les fonctions $f_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ et

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x \neq 0 \end{cases}$$

discuter la continuité, dérivabilité et caractère C^n de f_0 **[0.5 points]**, f_1 **[1 point]**, f_2 **[1 point]** et f_3 **[0.5 points]**.

iii) Construire (quand cela est possible) :

a) Une fonction $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, continue seulement en deux points. **[1 point]**

b) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en $\mathbb{R}$, périodique de période T (c.à.d $f(t+T) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$) et telle que $f'(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. **[1 point]**

Justifier vos réponses.