2018/19

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

Examen Final (16 mai 2018)

Temps : 2h00

Question 1 : [4 points] Étant donnée la fonction cosinus hyperbolique $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, on considère l'équation :

$$\frac{1}{(\cosh(x))^2} = \frac{1}{2}$$

Sans résoudre l'équation explicitement, montrer que :

i) L'équation admet deux solutions. [**3 points**]

ii) L'équation admet exactement deux solutions. [**1 point**]

Question 2 : [5 points]

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{1+\sin^2(x)} e^{\cos^2(t)} \frac{1}{1+e^t} dt \ ,$$

i) Justifier de manière détaillée que F est dérivable. [**2.5 points**]

ii) Calculer sa dérivée. [**2.5 points**]

Question 3 : [7 points]

i) Donner l définition d'une fonction de classe C^n sur $[a, b]$. [**1 point**]

ii) Étant données les fonctions $f_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ et

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x \neq 0 \end{cases}$$

discuter la continuité, la dérivabilité et le caractère C^n de f_0 [**1 point**], f_1 [**1 point**], f_2 [**0.5 points**] et f_3 [**0.5 points**].

iii) Énoncer le théorème des accroissements finis et l'appliquer à f_2 sur $[0, h]$, avec $h > 0$. [**1 point**]

iv) Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange et l'appliquer à f_2 en $x = 0$. Comparer avec iii) et justifier cette comparaison en termes de la relation générale entre le théorème des accroissements finis et celui de Taylor-Lagrange. [**1 point**]

v) Énoncer le théorème de Taylor avec reste intégral et l'appliquer à f_3 en $x = 0$. [**1 point**]

Question 4 : [4 points] On considère la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \ \text{if } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

i) Étudier la continuité de f. [**2 points**]

ii) Étudier l'intégrabilité au sens de Riemann de f. [**2 points**]