2019/20

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

Contrôle Continu Terminal (5 juin 2020)

Temps : 1h30

Chaque étudiant s'engage de façon signée, en participant à ce contrôle, à respecter les règles en vigueur à l'Université de Bourgogne, notamment à répondre sans aucune aide aux questions posées.

SIGNATURE OBLIGATOIRE :

Question 1 : [7 points]
On accepte $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

i) Montrer, sans appliquer des logarithmes, que l'équation

$$e^{-x^2} = \frac{1}{2}$$

admet deux solutions. **[1.5 points]**

ii) Montrer qu'elles sont les seules solutions. **[1.5 points]**

iii) Montrer que l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$

admet une solution. **[2 points]**

ii) Montrer que cette solution est unique. **[2 points]**

Question 2 : [6 points] Étant donnée $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$:

i) Montrer $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ **[2 points]**

ii) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n([0, \pi])$ **[1 point]**

iii) Calculer $\sin(1)$ avec une erreur plus petit que 10^{-12}. **[3 points]**

Question 3 : [7 points]
Étant donnée la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x \neq 0 \end{cases}$$

on considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{e^{-x^2}\cos(x)} f(t)dt \ ,$$

i) Justifier de manière détaillée que F est dérivable. **[2.5 points]**

ii) Calculer sa dérivée. **[2.5 points]**

iii) Donner un exemple de fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ bornée et non-continue, pour laquelle on peut calculer son intégrale $I = \int_{-1}^{1} g(x)dx$ en utilisant la règle de Barrow (ou deuxième théorème fondamental du calcul). Évaluer explicitement I. **[2 points]**