Équations différentielles ordinaires (EDOs)

Motivation:

Étant donné une fonction $f: I \to \mathbb{R}$, avec expression $f(x)$, $x \in I$, le problème de trouver sa primitive $y: I \to \mathbb{R}$ on peut le formuler comme:

$$\boxed{y'(x) = f(x)} \qquad (*)$$

C'est notre premier exemple d'équation différentielle ordinaire. On a appris que si $y = y(x)$ est une solution, si c'est une primitive, alors $\bar{y} = y(x) + C$ est aussi une primitive (où C est constante).

Alors, la solution à $(*)$ est fixée à une constante près.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit une fonction: $F: I \times \mathbb{R}^n$ continue. L'expression:

$$(**) \qquad y^{(n)}(x) = F(\underbrace{x}_{1}, \underbrace{y(x)}_{1}, \underbrace{y'(x)}_{2}, \underbrace{y''(x)}_{3}, \dots, \underbrace{y^{(n-1)}(x)}_{n})$$

définit une équation différentielle d'ordre n avec inconnue $y: I \to \mathbb{R}$, $y(x)$.

Définition (solution d'une EDO): On appelle solution de $(**)$ à une couple (I, φ), I intervalle et $\varphi: I \to \mathbb{R}$, telle que :

i) φ est n fois dérivable.

ii) $\forall x \in I$ on a:

$$\varphi^{(n)}(x) = F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

Exemple 1 :

On considère $\boxed{y'(x) = -\frac{y(x)}{x}}$ $\quad y'(x) = F(x, y(x))$

Ici : • $n = 1$

• $F(x,y) = -\frac{y}{x}$ $\qquad F : \mathbb{R} \times \overset{n=1}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

Une solution à cette equation est donnée par

$$y : \overbrace{]0, \infty[}^{I}$$
$$x \mapsto \boxed{y(x) = \frac{2}{x}}$$

En effet : $\quad y'(x) = -\frac{2}{x^2}$

$$F(x, y(x)) = -\frac{y(x)}{x} = -\frac{\frac{2}{x}}{x} = -\frac{2}{x^2}$$

Alors :
$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad \checkmark$$

En fait, on peut verifier : $\boxed{y(x) = \frac{C}{x}}$ est aussi solution.

C'est le cas qu'on trouve de forme générale :

- La solution (intégrale) générale d'une équation d'ordre n est une expression qui dépend de n constantes (libres) et qui satisfait l'EDO.

- Pour chaque choix de constantes on a une solution particulière.

- Solution (intégrale) singulière : solution qui n'est pas générale et non plus particulière.

<u>Exemple 2</u> : $\boxed{y''(x) = -\omega^2 y(x)}$, $\omega \in \mathbb{R}$

$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$

(oscillateur harmonique)

Ici : $n = 2$

$F(x,y) = -\omega^2 y$

On peut vérifier :

$y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$ est une solution. C'est la solution générale.

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Si par exemple, je choisi $C_1 = 0$, $C_2 = 1$

$y(x) = \sin(\omega x)$

C'est une solution particulière.

<u>Proposition</u> : Soit (I, y) est solution de $(**)$, alors $y \in C^n(I)$

Il y a un théorème (Cauchy-Lipschitz) qui vous garantie l'existence et l'unicité d'une EDO avec conditions initialles.

<u>Équations Différentielles Ordinaires linéaires</u>

Équations différentielles ...

à coefficients constantes

Déf: Soient $g_1, g_2, \dots g_n : I \to \mathbb{R}$. Une éq. de la forme:

$$y^{(n)} + g_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + g_2(x)\, y^{(n-2)}(x) + \dots + g_{n-1}(x)\, y'(x) + g_n(x)\, y(x) = f(x)$$

est dite une EDO linéaire (d'ordre n)

si $f(x) = 0$, l'éq. est homogène.

Elle est non-homogène dans le cas contraire.

Déf: On dit que $y_1, y_2, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ sont linéairement indépendant si:

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$, alors $c_1 = \dots = c_n = 0$

On peut montrer que $y_1, \dots, y_n$ sont l.i. ssi son Wronskian

$$W(y_1, \dots y_n) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

est non zéro.

Ici on va considérer EDOs d'ordre $n = 2$ avec coefficient $g_1, \dots g_{n-1}$ constants.

C'est à dire :

$$(***)\quad \boxed{y'' + ay' + by = f(x)} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

<u>Théorème</u>. Si y_1 et y_2 sont solutions particulières de l'éq. homogène :

$$(****)\quad \boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

et y_1 et y_2 sont linéairement indépendants

alors la solution générale de $(****)$ est

$$\boxed{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2}$$

Theorème : Étant donné :

$$\boxed{y'' + ay' + by'' = f(x)}$$

si y_p est une solution particulière de l'éq. non-homogène $(***)$ y y_h est la solution générale de l'éq. homogène $(****)$

alors

$$y = y_h + y_p$$

est la solution générale de l'éq. non-homogène.

<u>En pratique</u> (algorithme) :

- On commence avec l'EDO homogène :

$$y'' + ay' + by = 0$$

i) On cherche une solution de la forme

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$y = e^{\lambda x}$$
$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

On substitue dans l'eq :

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$$

Mais $e^{\lambda x} \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\lambda x} \neq 0 \\ e^{\lambda x}(\underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b}_{=0}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

On peut écrire $\Delta = a^2 - 4b$

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Trois cas, en fonction des racines λ_1, λ_2 :

a) λ_1, λ_2 différents, réelles :

$$\boxed{y_a = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$$

Exemple : $y'' - 4y = 0 \xrightarrow[\uparrow\, y = e^{\lambda x}]{} \lambda^2 - 4 = 0$

$$\longrightarrow \lambda = \pm 2 \; , \; \lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = -2$$

$$y_a = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2$ (réelles) lin. ind.

b) $\lambda_1 = \lambda_2$ (réelles)

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$

Ex. vérifier que c'est une sol. part.

Exemple:

$$\left.\begin{array}{l} y'' + 2y' + y = 0 \\ y = e^{\lambda x} \end{array}\right\} \to \underbrace{\lambda^2 + 2\lambda + 1}_{(\lambda+1)^2} = 0 \to \lambda_{1,2} = -1$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

c) λ_1 et λ_2 complexes $\to \bar{\lambda}_1 = \lambda_2$

$$\left(\begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x - iy \end{array} \right)$$

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta$$
$$\lambda_2 = \alpha - i\beta$$

$$y_h = \tilde{C}_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{C}_2 e^{(\alpha - i\beta x)}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

(Rappel: $e^{x+iy} = e^x \underbrace{e^{iy}}_{\cos y + i\sin y} = e^x(\cos x + i \sin y)$)

On peut réécrire:

$$y_h = \tilde{C}_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin \beta x) +$$
$$\tilde{C}_2 e^{\alpha x}(\underbrace{\cos(-\beta x)}_{\cos\beta x} + \underbrace{i\sin(-\beta x)}_{-i\sin\beta x})$$
$$= C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{C}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Exemple:

$$y'' + 6y' + 12y = 0$$
$$\int y = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2} = = \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$= -3 \pm i\sqrt{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_h &= \tilde{C}_1 e^{(-3+i\sqrt{3})x} + \tilde{C}_2 e^{(-3-i\sqrt{3})x} \\ &= C_1 e^{-3x}\cos(\sqrt{3}x) + C_2 e^{-3x}\sin(\sqrt{3}x) \end{aligned}}$$

Pour des EDOs linéaires à coeffic. constants d'ordre n, la procédure est exactement la même, mais «l'équation (algébrique) caractéristique» est d'ordre n. ($n \geq 5$ on ne sait pas le résoudre de forme exacte).

On regarde maintenant:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

On sait: $y = \underline{\underline{y_h}} + y_p$

Il faut trouver y_p. Il n'y a pas une méthode générale. Il y a <u>deux</u> approches ou méthodes (et après ... l'art).

$\boxed{\text{i) Coefficients indeterminés}}$.

ii) Variation de constantes.

i) Coefficients indéterminés.

ii) Variation de constantes.

On va discuter i)

On a besoin de $f(x)$ donné par des sommes, des produits... de :

$$x^n,\ e^{mx},\ \cos\beta x,\ \sin\beta x$$

On va proposer comme hypothèse pour y_p une forme qui généralise $f(x)$:

Exemple :

$f(x) = 3x^2 \longrightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$

$f(x) = 4xe^x \longrightarrow y_p = Axe^x + Be^x$

$f(x) = x + \sin 2x \longrightarrow y_p = (Ax+B) + C\sin x + D\cos x$

<u>Exemple</u> :

$$\boxed{y'' - 2y' + 3y = 2\sin x}$$

$$y = y_h + y_p$$

- y_h :

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

$$\Big\downarrow e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 3,\quad \lambda_2 = -1$$

$$\boxed{y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}$$

- y_p : $\quad y_p = A\cos x + B\sin x$

On va chercher A et B tel que y_p soit solutn. de la non-homo.

Pour fixer A et B :

$$y_p = A\cos x + B\sin x$$
$$y_p' = -A\sin x + B\cos x$$
$$y_p'' = -A\cos x - B\sin x$$

Donc $y'' - 2y' + 3y = 2\sin x$

$$\underbrace{(-A\sin x - B\cos x)}_{y_p''} - 2(\underbrace{A\cos x - B\sin x}_{y_p'})$$
$$+3(\underbrace{A\sin x + B\cos x}_{y_p}) = \underbrace{2\sin x}_{f(x)}$$

Je peux réarranger :

$$\cos x(\underbrace{-A - 2B - 3A}_{-4A-2B}) + \sin x(\underbrace{-B + 2A - 3B}_{-4B+2A})$$
$$= 2\sin x + 0.\cos x$$

Donc :

$$\begin{cases} -4A - 2B = 0 \longrightarrow B = -2A \\ 2A - 4B = 2 \end{cases} \longrightarrow 2A - 4(-2A) = 2$$

$A = 1/5$

$B = -2/5$

$$y_p = \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$$

$$\boxed{y = y_h + y_p = \underbrace{C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x}_{y_p}}$$

Si on vous demande :

Trouver la solution particulière :

$$(*) \begin{cases} \boxed{y'' - 3y' + 2y = 2\cos x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2\cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Vous pouvez vérifier (exercice) :

La solution générale est :

$$\boxed{y = \underbrace{A e^{2x} + B e^{x}}_{y_H} - \frac{3}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x}$$

· Maintenant il faut imposer :

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$$y' = 2A e^{2x} + B e^{x} - \frac{3}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x$$

$y(0) = 1 \rightarrow A + B - 0 + \frac{1}{5} = 1$

$y'(0) = 0 \rightarrow 2A + B - \frac{3}{5} = 0$

Donc : $\begin{cases} A + B = 4/5 \\ 2A + B = 3/5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A = -1/5 \\ B = 1 \end{matrix}$

La solution à (*) :

$$\boxed{y = -\frac{1}{5} e^{2x} + e^{x} - \frac{3}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x}$$