2016/17

Mathématiques Math21 (Analyse 2)

Contrôle Partiel 2017 (8 mars)

Temps : 1h45

Question 1 : [3 points]

Montrer, en utilisant la notion de borne inférieure, la version suivante de la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$: pour tout $x < 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx < y$.

Question 2 : [6 points]

Trouver la borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum (quand ils existent) des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \tfrac{\cos(n\pi)}{(n+2)!} \ ; \ n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \right\} , \qquad \textbf{[2 points]}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \ ; \ x^3 - x > 0 \right\} , \qquad \textbf{[2 points]}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \ ; \ |x+1| \leq |x-1| \right\} . \qquad \textbf{[2 points]}$$

Question 3 : [7 points]

i) Étant données deux suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, énoncer le critère de convergence de Stolz-Cesàro pour la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. **[1 point]**

ii) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec

$$u_n = \frac{2+4+6+\ldots 2n}{1+3+5+\ldots+2n-1} \qquad \textbf{[3 points]}$$

iii) Montrer la condition nécessaire suivante de convergence d'une suite numérique $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \ell \implies \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} = \ell \qquad \textbf{[2 points]}$$

[*Suggestion :* utiliser le point i) de cette Question.]

iv) Est-ce que l'implication réciproque est vrai ? Si non, donner un contre-exemple. **[1 point]**

Question 4 : [4 points]

i) Étant données deux suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives, montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est $\ell_1 + \ell_2$. **[1 point]**

ii) Construire (si ce n'est pas possible, justifier pourquoi) :

a) Deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{Q}$ et $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **[1 point]**

b) Une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non-convergente contenant deux sous-suites croissantes et bornées. **[1 point]**

c) Une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont plus grands que $-\pi$ et plus petits que e^{-1} et telle qu'elle n'admet aucune sous-suite convergente. **[1 point]**