2017/18

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

Contrôle Partiel 2018 (7 mars)

Temps : 1h45

Question 1 : [3 points]

Montrer que tout nombre irrationnel $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ peut être écrit comme la limite d'une suite de nombres rationnels. Notamment, $\exists \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $r_n \in \mathbb{Q}$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = p$.

Question 2 : [6 points]

Trouver la borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum (quand ils existent) des ensembles suivants :

$$A = \left\{ y \in \mathbb{R} \; ; \; \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = e^{-x^2} \right\} , \qquad \textbf{[2 points]}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \; ; \; x^4 - 5x^2 + 4 > 0 \right\} , \qquad \textbf{[2 points]}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \; ; \; |x+2| < 1 + |x| \right\} . \qquad \textbf{[2 points]}$$

Question 3 : [7 points]

i) Étant données deux suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, énoncer le critère de convergence de Stolz-Cesàro pour la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. **[1 point]**

ii) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec

$$u_n = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3}{n^4} \qquad \textbf{[3 points]}$$

iii) Montrer la condition nécessaire suivante de convergence d'une suite numérique $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \ell \implies \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} = \ell \qquad \textbf{[2 points]}$$

[*Suggestion :* utiliser le point i) de cette Question.]

iv) Particulariser le point précédent iii) à la suite $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, avec $c_n = \{(-1)^n\}$. **[1 point]**

Question 4 : [4 points]

i) Donner la définition de convergence d'une suite numérique.
Étant données deux suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives, montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est $\ell_1 - \ell_2$.
[1.5 point]

ii) Construire (si ce n'est pas possible, justifier pourquoi) :

a) Un ensemble $A \subset \mathbb{N}$ de cardinal strictement plus petit que le cardinal de $\mathbb{N}$.
La même chose pour un ensemble non-borné $B \subset \mathbb{N}$. **[1 point]**

b) Un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ qui n'est pas limite d'une suite de nombres irrationnels.
[0.5 point]

c) Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes positifs ($a_n > 0$), majorée par une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, telle qu'elle n'admet aucune sous-suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.
[1 point]