2018/19

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

Contrôle Partiel 2019 (6 mars)

Temps : 1h30

Question 1 : [6 points]

i) Énoncer la définition de convergence d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **[2 points]**

ii) Énoncer le théorème qui affirme que $\mathbb{R}$ es Archimédien. **[2 points]**

iii) Appliquer les points i) et ii) ci-dessus pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n = \dfrac{1}{n}$, converge vers 0. **[2 points]**

Question 2 : [6 points]

i) Étant données deux suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, énoncer le critère de convergence de Stolz-Cesàro pour la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. **[2 points]**

ii) Démontrer que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée et convergente. **[2 points]**

iii) Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée, calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \ ,$$

en termes de la borne supérieure de l'ensemble $U = \{u_n \ ; n \in \mathbb{N}\}$. **[2 points]**

Question 3 : [5 points] Trouver la borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum (quand ils existent) des ensembles suivants :

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ ; \tfrac{\pi}{4} \leq \arctan(x) < \tfrac{\pi}{3}\right\} \ , \qquad \textbf{[2.5 points]}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ |x+1| < 2 - |x|\} \ . \qquad \textbf{[2.5 points]}$$

Question 4 : [3 points]

i) Étant donné $x \in \mathbb{R}$, énoncer la définition de sa "partie entière", notée par $[x]$. **[1 point]**

ii) Étant donnée un suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente vers $+\infty$, montrer : **[2 points]**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{[u_n]} = 1$$