2019/20

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

TD1

Les exercices marqués avec $(*)$ sont d'approfondissement. Il est conseillé de les abordés après avoir maîtrisé le reste des exercices.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Suivre les pas suivants :
   i) Étant donné un ensemble A et le sous-ensemble $B = \{a_i \in A \; ; \; i \in \mathbb{N}\}$, avec $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$, justifier que B est dénombrable.
   ii) Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
   iii) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

3. $(*)$ Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ne peut pas être rationnel.
   [*Suggestion* : Utilisez le théorème de Ruffini (théorème de racines rationnelles) : toute solution p/q, avec p et q premiers entre eux, d'une équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_0 = 0$ avec $a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0, a_n \neq 0$, vérifie que p divise à a_0 et q divise à a_n].

4. (*Puissance du continu*). On dit que deux ensembles A et B sont équipotents, et on note $A \sim B$, si on peut construire une application bijective $f : A \to B$.
   a) Montrer que $\sim$ définit une rélation d'équivalence.
   [*Remarque* : Étant donné un ensemble E, une relation binaire sur E est un sous-ensemble de $E \times E$. Si $(x, y) \in E \times E$ appartient à ce sous-ensemble, on écrit $x \sim y$. Une relation d'équivalence est une relation binaire qui est à la fois réflexive ($x \sim x, \forall x \in E$), symétrique ($x \sim y \Rightarrow y \sim x$) et transitive ($x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$)].
   b) Montrer les équivalences suivantes :
   $$[0,1] \sim]0,1[$$
   $$[0,1] \sim [0,1[$$
   $$[0,1] \sim]0,1]$$
   c) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ les intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ sont équipotents.
   d) Montrer $[0, 1] \sim \mathbb{R}$.

5. (*Partie entière de x*). Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leq x < (n + 1)a$.
   [*Remarque* : Si on applique le resultat avec $a = 1$, l'entier n obtenu s'appelle la partie entière de x].

6. Montrer :
   $$\begin{array}{rcll} |x+y| & \leq & |x|+|y| & \text{(inégalité triangulaire)} \\ ||x|-|y|| & \leq & |x-y| & \text{(inégalité triangulaire inverse)} \end{array}$$

7. Résoudre les inégalités :

$$\begin{aligned}|x+1| &< |x-1| \\ |x+2| &< 1+|x|\end{aligned}$$

8. Trouver la borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum de

$$\begin{aligned}C &= \{\frac{\sin n\pi}{n}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}\} \\ D &= \{\frac{\cos n\pi}{n}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

9. Trouver la borne supérieure et la borne inférieure, quand elles existent, des ensembles suivants (en spécificiant s'ils ont un maximum et/ou un minimum) :

$$\begin{aligned}A &= \left\{\frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\right\} , \\ B &= \left\{\frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0\right\} , \\ C &= \left\{x \ ; \ x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\right\} , \\ D &= \left\{x \ ; \ 0 \leq x < \sqrt{2}, \ x \in \mathbb{Q}\right\} , \\ E &= \left\{x \ ; \ x^2 + x + 1 \geq 0\right\} , \\ F &= \left\{x \ ; \ x^2 + x - 1 < 0\right\} , \\ G &= \left\{x \ ; \ x < 0, x^2 + x - 1 < 0\right\} .\end{aligned}$$

10. $(*)$ (*Intervalles et topologie*).
   i) Montrer que, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]a, b[$ est ouvert et l'intervalle $[a, b]$ est fermé. Si on considère $[a, b[$, est-il ouvert ? est-il fermé ?
   ii) Donné $A = [0, 1[\cup]2, 5[$ calculer l'intérieur et l'adhérence de A.

11. $(*)$ Soient A et B sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer :
   i) Si A et B sont fermés, alors $A \cup B$ est fermé.
   ii) Si A et B sont ouverts, alors $A \cap B$ est ouvert.

12. $(*)$
   i) Donner un exemple dans lequel l'union d'un nombre infini d'ensembles fermés de $\mathbb{R}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.
   ii) Donner un exemple dans lequel l'intersection d'un nombre infini d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}$.