2019/20

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

TD2

Les exercices marqués avec $(*)$ sont d'approfondissement/complémentaires. Il est conseillé de les aborder après avoir maîtrisé le reste des exercices.

1. Donner des exemples de suites numériques avec les caractéristiques suivantes :
   i) Une suite qui ne converge pas et qui n'est pas divergente.
   ii) Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes positifs, non bornée, et telle que la suite $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
   iii) Une suite de termes positifs, non monotone et qui converge vers 0.
   iii) Une suite non bornée, avec une sous-suite convergente.

2. Étant données les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$a_n = \frac{n^2+1}{n+2} \quad , \quad b_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad , \quad c_n = \frac{5n+1}{4n-1} \quad ,$$
   montrer que :
   i) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et elle est strictement croissante.
   ii) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   iii) La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{5}{4}$, en utilisant la définition de suite convergente.

3. (*Complément du cours*). Montrer les résultats suivants sur la convergence de suites numériques :
   i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers $+\infty$, alors elle est minorée.
   ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite $\ell > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > 0$. Plus précisément il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n > \delta$.
   iii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si ses sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers ℓ.

4. Prouver, $\forall n \in \mathbb{N}$, les expressions :
$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+(2n-1) &= n^2 \\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 1^3+2^3+\ldots+n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

5. Construire (si ce n'est pas possible, justifier pourquoi) :
   a) Deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{Q}$ et $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
   b) Une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non-convergente contenant deux sous-suites croissantes et bornées.

c) Une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont plus grands que $-\pi$ et plus petits que e^{-1} et telle qu'elle n'admet aucune sous-suite convergente.

6. (*Suites de Cauchy*). Étant donnée une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que la suite (a_n) est de Cauchy si $\forall\epsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ on ait $|a_n - a_m| < \epsilon$.

   i) Montrer qu'une suite de Cauchy est une suite bornée.

   ii) Conclure que toute suite de Cauchy admet une sous-suite convergente.

   [*Remarque* : Si on se restreint à $\mathbb{Q}$, les suites de Cauchy offrent une voie pour introduire les nombres réels comme "complétion" des rationnels, notamment en exigeant qu'une suite de Cauchy soit aussi convergente dans l'ensemble de nombres considéré. De façon plus générale, un espace (métrique) est *complet* si toute suite de Cauchy est convergente].

7. (*Critère de convergence de Stolz-Cesàro*). Étant données deux suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec (b_n) strictement croissante et divergente (vers $+\infty$), montrer que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \ell \ ,$$

   alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \ .$$

   [*Remarque* : Ce résultat fournit un critère de convergence qui peut être vu comme une version pour des suites de la règle de l'Hôpital qu'on verra plus tard (pour des limites de fonctions dérivables)].

8. Étant donnés $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \\ b_n &= n^3 \end{aligned}$$

   on considère la convergence de la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier :

   i) Appliquer le critère de Stolz-Cesàro pour calculer la limite suivante (si elle existe) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ .$$

   ii) Vérifier le résultat en utilisant l'exercice 4.

9. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :

$$\begin{aligned}
a_n &= r^n \quad \text{(en fonction de la valeur de } r \in \mathbb{R}) \\
a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
a_n &= \sqrt[3]{n^3+n^2} - n \\
a_n &= \sqrt[k]{n^k+n^{k-1}} - \sqrt[k]{n^k-n^{k-1}} \quad , \quad k \in \mathbb{N} \\
a_n &= n \sin \frac{1}{n} \\
a_n &= n^2 \left(1 - \cos^4 \frac{1}{n}\right) \\
a_n &= \frac{\ln\left(n^8+5n^4+1\right)}{\ln\left(n^4+n^3+1\right)} \\
a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

10. $(*)$ (*Nombre e*). On définit la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
 i) Majorée.
 ii) Strictement croissante.
En conclure que la suite est convergente, avec limite le nombre réel $sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. On appelle e ce nombre réel.

11. $(*)$ (*Séries numériques*). Étant donnée la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n \ .$$

Les éléments s_n de la nouvelle suite sont appelés *sommes partielles* de la série numérique de terme général a_n. Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec limite s (c'est-à-dire, si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$), on appelle s la somme de la série numérique et on note $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

Par rapport aux suites numériques générales, l'étude de la convergence des séries numériques a ses propres techniques spécialisées, qui seront étudiés dans des cours ultérieurs. Comme application des méthodes standard des suites numériques, on propose deux exercices.
 i) (*Série géométrique*). Étant donné $0 \leq r < 1$, montrer :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \ .$$

 Montrer que la série est divergente pour $r \geq 1$.

ii) (*Définition alternative de* e). Étant donnée la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, montrer :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ est convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

c) e est irrationnel.