2019/20

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

TD3

Les exercices marqués avec $(*)$ sont d'approfondissement/complémentaires. Il est conseillé de les abordés après avoir maîtrisé le reste des exercices.

1. (*Continuité et suites numériques*). Étant donnée $f : I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, la fonction f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $u_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$) qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

2. (*Exemples de fonctions discontinues sur des ensembles denses dans* $\mathbb{R}$). Si on considère des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   i) Donner un exemple d'une fonction discontinue en tout point.
   ii) Étudier la continuité de la fonction
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(2\pi m! x\right)\right)^n\right) \end{aligned}$$
   iii) Donner un exemple d'une fonction qui est continue seulement en un point.
   iv) Explorer l'idée d'une fonction qui est discontinue $\forall x \in \mathbb{Q}$ et continue $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (fonction de Thomae).

3. $(*)$ (*Continuité et fonctions monotones*). Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone sur $[a, b]$ est, au plus, dénombrable.

4. *(Conditions suffisantes d'existence de solutions d'une équation).*
   i) Montrer que l'équation
   $$\frac{300\, x^{50}}{x + 99} = 1 + \sin\frac{\pi x}{2} \ ,$$
   a, au moins, une solution.
   ii) Montrer que l'équation
   $$x^2 = x\cos x \ \ , \ x \in \mathbb{R} \ ,$$
   a, exactement, deux solutions.
   iii) Étant donnée l'équation
   $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ \ , \ \ \text{avec } a_n \neq 0 \ ,$$
   a) Montrer que pour tout n impair il existe, au moins, une solution.
   b) Montrer que si n est pair et $a_n a_0 < 0$, il existe au moins deux solutions.

5. (*Théorème des valeurs intermédiaires et points fixes*).
   i) On pose $I = [0, 1]$ et on se donne une fonction continue $f : I \to I$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, autrement dit que $g(x) = f(x) - x$ s'annule (*on dit que f a un "point fixe"*).

ii) Soit $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $I \subset f(I)$. Montrer que f a au moins un point fixe.
iii) Montrer que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et décroissante, l'équation $f(x) = x$ a une unique solution.

6. (*) (*Ensembles ouvertes/fermés et continuité*). Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, montrer que l'image réciproque d'un ensemble ouvert [dans $\mathrm{Im}(f)$)] est un ensemble ouvert. Montrer que l'image réciproque d'un ensemble fermé est un ensemble fermé.

   [*Rappel :* un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est ouvert si tout point $x \in E$ est *intérieur*, c'est à dire, si $\forall x \in E$ il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset E$; un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est fermé si tout point x de l'adhérence $\bar{E}$ appartient aussi à E ; c'est-à-dire, si tout point $x \in \mathbb{R}$ pour lequel $\forall \epsilon > 0$ on a $]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap E \neq \emptyset$, appartient aussi à E.]

7. Dans l'exercice 4 de la feuille de TD1, on a construit des applications bijectives entre l'intervalle $[0, 1]$ et les intervalles $]0, 1[$, $[0, 1[$ et $]0, 1]$, pour montrer qu'il s'agit d'ensembles équipotents. Est-ce que ces bijections sont continues ? Est-ce qu'on peut construire des bijections continues entre ces intervalles ? Entre lesquels ?

8. Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ continues et les fonctions

$$h_1 : A \to \mathbb{R}, \quad \text{avec} \quad h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
$$h_2 : A \to \mathbb{R}, \quad \text{avec} \quad h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\} \ .$$

   Montrer que les fonctions h_1 et h_2 sont continues.

9. (*) (*Continuité uniforme*).
   i) Étant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $f(x) = x^2$, montrer que f n'est pas uniformément continue.
   ii) Étant donnée $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty \ ,$$

   montrer que f n'est pas uniformément continue.
   iii) Étant donnée $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \ ,$$

   montrer que f est uniformément continue.

10. (*) (*Continuité uniforme et Lipschitz*). Étant donnée la fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, avec $f(x) = \sqrt{x}$, montrer que :
   i) f est uniformément continue.
   ii) f n'est pas Lipschitz continue.