TD 3

Ex. 1 (Continuité et suites numériques). Étant donnée $f : I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, la fonction f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $u_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$) qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Sol :

- f continue en $x_0 \Rightarrow \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ t.q. } u_n \to x_0 \Rightarrow f(u_n) \to f(x_0)\right)$

On a alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$. t.q. $\forall x; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

On considère un suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arbitraire mais fixe tel que $u_n \to x_0$.

En particulier ça veut dire que pour ce $\delta > 0$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a $|x_n - x_0| < \delta$.

Mais vu que $x_n \in I$ et que f est continue en x_0, on a

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Alors, on a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$. t.q $\forall n \geq n_0$ on a $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

- $\left(\underbrace{\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ t.q } u_n \to x_0 \Rightarrow f(u_n) \to f(x_0)}_{p}\right) \Rightarrow \underbrace{f \text{ continue en } x_0}_{q}$

On va montrer la contraposée : no $q \Rightarrow$ no p

C'est à dire,

f non-continue en $x_0 \Rightarrow \left(\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ tel que } u_n \to x_0 \text{ et } f(u_n) \text{ ne converge pas à } f(x_0)\right)$

Si f n'est pas continue en x_0, on a que:

$\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, $\exists x$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.

. Donné ce $\varepsilon > 0$, on considère un $\delta_0 > 0$ et $u_0 = x$ tel que

$|u_0 - x_0| < \delta_0$ mais $|f(u_0) - f(x_0)| > \varepsilon$.

. Maintenant on considère $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2} > 0$ et $u_1 = x$ tel que

$|u_1 - x_0| < \delta_1$ mais $|f(u_1) - f(x_0)| > \varepsilon$.

. On recommence la procédure indéfiniment de tel manière que pour un $\delta_n = \frac{\delta_0}{2^n} > 0$ on prend $u_n = x$ tel que

$|u_n - x_0| < \delta_n$ mais $|f(u_n) - f(x_0)| > \varepsilon$.

Ainsi on a construct deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et δ_n tel que

$0 < |u_n - x_0| < \delta_n$

et $\delta_n \to 0$, donc $|u_n - x_0| \to 0 \Rightarrow u_n \to x_0$.

Pourtant la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et telle que $\forall u_n$ on

$|f(u_n) - f(x_0)| > \varepsilon > 0$, donc $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger ver $f(x_0)$.

C'est à dire, on a construit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n \in I$, tel que $u_n \to x_0$ et $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas a $f(x_0)$.

$\square$

2.- (Exemples de fonctions discontinues sur des ensembles denses dans $\mathbb{R}$). Si on considère des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

i) Donner un exemple d'une fonction discontinue en tout point.

ii) Donner un exemple d'une fonction que est continue seulement en un point.

iii) Explorer l'idée d'une fonction qui est discontinue $\forall x \in \mathbb{Q}$ et continue $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (fonction de Thomae).

Sol:

i) Un exemple est :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Celle-ci est la fonction caractéristique (ou indicatrice) de l'enemble $\mathbb{Q}$

Pour voir qu'elle est discontinue en tout point on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ et la densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

On le fait de deux manières :

a) ε-δ :

On va montrer $\forall x_0\in\mathbb{R}$, $\exists\, \varepsilon>0$ tel que $\forall \delta>0$, $\exists x$ t.q $|x-x_0|<\delta$ et $|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon$

En effet, si $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on prend $\varepsilon=1/2$, si on considère $\delta>0$, et $x_0-\delta$, on sait que $\exists\, x\in\mathbb{Q}$ et $x\in\,]x_0-\delta, x_0[$ par la densité de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Alors $|x-x_0|<\delta$ et $|\underbrace{f(x)}_{1}-\underbrace{f(x_0)}_{0}|=|1-0|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon$

De la même manière, si $x_0\in\mathbb{Q}$, on prend $\varepsilon=1/2$, $\delta>0$ et $x_0-\delta$. On sait qu'il existe $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $x\in\,]x_0-\delta, x_0[$. Alors

$|x-x_0|<\delta$ et $|\underbrace{f(x)}_{0}-\underbrace{f(x_0)}_{1}|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon$.

Donc $\forall x_0\in\mathbb{R}$, f n'est pas continue en x_0.

5) On utilise l'exercice 1.

On va montrer que $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to x_0$ et $i_n \to x_0$, mais $\lim_{n\to\infty} f(r_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(i_n)$ (alors au moins une suite ne converge pas à $f(x_0)$).

En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère $\delta > 0$. Dans l'intervalle $x_0 - \delta$ on choisit $r_1 \in \mathbb{Q}$, $r_1 \in]x_0 - \delta, x_0[$ et $i_1 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $i_1 \in]x_0 - \delta, x_0[$.

À continuation on considère $\frac{\delta}{2} > 0$ et $r_2 \in]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0[$, $r_2 \in \mathbb{Q}$ et $i_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $i_2 \in]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0[$. On itère la procédure. Dans le pas n, on considère $x_0 - \frac{\delta}{2^n}$ et $r_n \in \mathbb{Q} \in]x_0 - \frac{\delta}{2^n}, x_0[$ et $i_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $i_n \in]x_0 - \frac{\delta}{2^n}, x_0[$.

De cette manière on construit les suites:

$$x_0 - \frac{\delta}{2^n} < r_n \leq x_0 \quad \text{et} \quad x_0 - \frac{\delta}{2^n} < i_n < x_0$$

$$r_n \in \mathbb{Q} \qquad\qquad i_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

$$f(r_n) = 1 \qquad\qquad f(i_n) = 0$$

Si on fait $n \to \infty$, on a:

$$r_n \to x_0 \ , \quad i_n \to x_0$$

$$f(r_n) \to 1 \ , \quad f(i_n) \to 0.$$

Ce qu'on a utilisé dans le deux cas est la densité de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

De la même manière, n'importe quelle:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad a \neq b$$

$$f(x) = \begin{cases} a & , x \in \mathbb{Q} \\ b & , x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dirichlet function as a limit.

On peut exprimer la fonction de Dirichlet comme:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left(\cos(m!\,\pi x)\right)^{2n}$$

$$\lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \left(\cos(2\pi\, m!\, x)\right)^{n}\right)$$

2. ii) Étudier la continuité de la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} (\cos 2\pi m!\, x)^n \right)$$

Sol :

On va évaluer f et vérifier qu'elle satisfait
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

C'est à dire, il s'agit de la fonction de Dirichlet ou fonction caractéristique (indicatrice) de $\mathbb{Q}$.

a) Soit $x \in \mathbb{Q}$, alors on peut écrire $x = \frac{p}{q}$.
On va a considérer le représentant irréductible, alors p et q sont premiers.

Alors $\forall m \geq q$, on a $m! \frac{p}{q} = k \in \mathbb{Z}$, car $m! = m(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$, contient q comme un de ses facteurs. Alors
$\forall x, \exists\, m_x$ tel que $\forall m \geq m_x$, $m!x \in k \in \mathbb{Z}$, donc
$$\cos(2\pi m! x) = \cos(2\pi k) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi m! x)^n = 1$$
Par conséquence, vu que à partir m_x la suite $\left\{ \lim_{n\to\infty} (\cos 2\pi m!\, x)^n \right\}_{m\in\mathbb{N}}$ est constante et égale à 1, on a :

$$\lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} (\cos 2\pi m!\, x)^n \right) = 1$$

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On considère un $m \in \mathbb{N}$, alors $m!x \notin \mathbb{Q}$. En effet, si on raisonne par l'absurd et on considère $m!\,x = r \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{r}{m!} \in \mathbb{Q}$ et on a une contradiction donc $m!x \notin \mathbb{Q}$.

Mais alors $|\cos 2\pi m!x| < 1$, car les seules possibilités d'avoir $|\cos 2\pi m!\,x| = 1$ et quand $m!\,x = \frac{K}{2}$, $K \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, on a que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et m donnés

$$\lim_{n \to \infty} (\underbrace{\cos(2\pi m!x)}_{|\cdots| < 1})^n = 0$$

Si maintenat on prend la $\lim_{m \to \infty}$, alors

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (\cos(2\pi m!\,x))^n = 0$$

On a montré $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

donc f est disontinue partout, comme on a montré en 2.i).

ii) On considère la fonction:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Comme on a indiqué dans le point précédent, si $x \neq 1-x$, alors f est discontinue en x.

Alor $x = 1-x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Donc f discontinue $\forall x \neq 1/2$

Si on considère $x = 1/2$, on prend une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tel que $u_n \to \frac{1}{2}$. On ~~partitionne~~ "$(u_n)_{n\in N}$ en" deux sous-suites $(u_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $u_n^r \in \mathbb{Q}$, $u_n^i \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Bien:

a) u_n^r finite
b) u_n^i finite
c) Tous les deux infinie.

Dans les cas a) et b) $\exists K \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq K$ $u_n = u_n^r$ ou $u_n = u_n^i$. $(u_n)_{n\geq K} = (u_n^r)_{n\geq K}$ ou $(u_n)_{n\geq K} = (u_n^i)_{n\geq K}$

Dans le premier cas: $f(u_n) = u_n \to \frac{1}{2} = f(1/2)$

Dans le dexième cas: $f(u_n) = 1 - u_n \to 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $f(1/2)$)

Pour c), on a $\{u_n\} = \{u_n^r\} \cup \{u_n^i\}$ et $\{u_n^r\} \cap \{u_n^i\} = \emptyset$

et $f(u_n^r) = u_n^r \to 1/2$

$f(u_n^i) = 1 - u_n^r \to 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et convergente avec $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \to \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$

Alors on a montré que $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{1}{2}$, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente à $f(\frac{1}{2})$ donc f est continue en $x = 1/2$

(iii) On considère la fonction de Thomae définie par

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & , x=0\\ \frac{1}{q} & , x\in\mathbb{Q} \quad , x=\frac{p}{q} \text{ fraction réduite }, q>0\\ 0 & , x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

La fonction f est discontinue sur les rationnels.

En effet, $\forall x_0\in\mathbb{Q}$ $f(x_0)\neq 0$. D'autre côté, comme dans les points précédents, on peut construire un suite de irrationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tel que $u_n\to x_0$. On a $f(u_n)=0\longrightarrow 0\neq f(x_0)$

alors f n'est pas continue en $x_0\in\mathbb{Q}$.

On considère maintenant $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

On prendre une suite quelconque telle que $u_n\to x_0$.

Comme dans le cas de la suite $u_n\to\frac{1}{2}$ dans le point ii), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être partionnée dans une suite de rationnels (u_n^r) et une sous-suite des irrationnels $(u_n^i)_{n\in\mathbb{R}}$. Le cas relevante est le cas des sous-suites infinies. Dans ce cas, $f(u_n^i)=0\longrightarrow 0=f(x_0)$

Il suffit de montrer que $\forall (u_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n^r\in\mathbb{Q}$, $u_n\to x_0$,

on a $f(u_n^r)=\frac{1}{q_n}\to 0$. (où $u_n^r=\frac{p}{q}$, $q>0$)

Pour ça il suffit de montrer que si $u_n=\frac{p_n}{q_n}\to x_0$, alors q_n n'est pas bornée. On montre ça par l'absurde. On suppose qu'il existe un $q\in\mathbb{N}$, $(q<\infty)$ tel que $u_n^r=\frac{p_n}{q_n}$,

on a $q_n<q$.

D'abord on note que $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et tel que $n\leq x<n+1$,

où $n=[x]$.

D'autre part $\exists\, n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$ $|u_n^r - x| < \min\{|x-n|, |x-(n+1)|\}$

c,à.d. tel que $u_n^r \in]n, n+1[$. Ainsi, on peut écrire :

$u_n^r = n + \frac{p_n}{q_n}$, avec p_n, q_n entiers premiers et $0 < p_n < q_n$

Autrement dit $u_n^r = \frac{n q_n + p_n}{q_n}$ et $f(u_n^r) = \frac{1}{q_n}$

Par hypothèse $q_n < q$. Mais, il y a un nombre fini de rationnels qu'on peut construire : on a : $q_n \in \{2, 3, 4, \dots, q-1\}$ et pour chaque q_n, on a $p_n \in \{1, 2, \dots, q_n - 1\}$.

Donc $(u_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ a un nombre fini d'éléments. Ceci est un contradiction avec le fait que $u_n^r \to x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ qui exige un nombre infini d'éléments (sinon $\min(|u_n^r - x_0|, n\in\mathbb{N}) = \delta > 0$ et la suite ne converge pas à x_0).

Alors, on a montré que dans $u_n^r = \frac{p_n}{q_n} \to x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, q_n est nécessairement non-bornée. Alors $f(u_n^r) = \frac{1}{q_n} \to 0 = f(x_0)$ et f est continue en x_0.

<u>Remarque</u>: La clé de cette construction est que pour approcher un irrationnel par un rationnel on a besoin de denominateurs arbitrairements grands.

3. (Continuité et fonctions monotones). Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'un fonction monotone sur $[a,b]$ est, au plus, dénombrable.

<u>Sol:</u>

On suppose que f est croissante sur $[a,b]$ et on écrit:

$$D = \{ x_0 \in [a,b] \, ; \, f \text{ est discontinue à } x \}$$

On va supposer ici (on peut le démontrer), qu'une fonction monotone admet l'existence de $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\forall x_0 \in]a,b[$ (en fait $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$)

Si $x_0 \in]a,b[\cap D$, alors $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, donc on peut choisir un nombre rationnel $r(x)$ (qui dépende de x), tel que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) < r(x) < \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

On accepte aussi le résultat : $a < b \Rightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) \leq \lim_{x \to b^-} f(x)$

(f monotone)

On considère $x_0, x_0' \in D$ ~~Ainsi,~~ avec $x_0 < x_0'$, on a alors

$$r(x_0) < \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leq \lim_{x \to x_0'^-} f(x) < r(x_0') \Rightarrow r(x_0) < r(x_0')$$

Ainsi, on a construit : $r: \begin{array}{l} D \to \mathbb{Q} \\ x \mapsto r(x) \end{array}$, telle que

$$\left.\begin{array}{l} x_0, x_0' \in D \\ x_0 \neq x_0' \end{array}\right\} \Rightarrow r(x_0) \neq r(x_0')$$

Alors r définit une injection de D en $\mathbb{Q}$ donc, donné la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$, on a que D est, au plus, dénombrable.

4.- (Conditions suffisantes d'existence de solutions d'une équation).

(i) Montrer que l'équation

$$x^2 = x\cos x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

a, exactement, deux solutions.

(ii) Étant donnée l'équation

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 , \qquad \text{avec } a_n \neq 0 ,$$

a) montrer que pour tout n impair il existe, au moins, un solution.

b) montrer que si n est pair et $a_n a_0 < 0$, il existe au moins deux solutions.

(iii) Montrer que l'équation

$$\frac{300\, x^{50}}{x+99} = 1 + \sin \frac{\pi x}{2}$$

a, au moins, une solution.

Sol:

i) On considère la fonction

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

avec

$$f(x) = \frac{300\, x^{50}}{x+99} - 1 - \sin\frac{\pi x}{2}$$

f est continue (quotient des fonctions continues où le dénominateur ne s'annule pas, et différence de fonctions continues).

On vérifie que:

$$f(0) = \underbrace{\frac{0}{0+99}}_{0} - 1 - \underbrace{\sin \frac{\pi 0}{2}}_{0} = -1$$

$$f(1) = \frac{300 \cdot 1}{100} - 1 - \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} = 3 - 1 - 1 = 1$$

Alors $f(0)\, f(1) < 0$ et, par le théorème de Bolzano, $\exists\ x_0 \in\ ]0,1[$ tel que $f(x_0) = 0$, c.à.d.

$$\frac{300\, x_0^{50}}{x_0+99} - 1 - \sin \frac{\pi x_0}{2} = 0$$

ii) On considère $x^2 = x \cos x$

• D'abord on observe que, si $x \neq 0$, on peut écrire

$$x = \cos x$$

Étant donné que $|\cos x| \leq 1$ et, on ne peut pas avoir de solutions pour $|x| > 1 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty, 1[$ $\cup\ ]1, \infty[$

En plus $x \notin\ ]-1, 0[$ car, si $x \in\ ]-1, 0[$, on a

$$x < 0$$
$$\cos x > 0$$

On conclut, qu'il n'y a pas de solutions dans

$$]-\infty, 0[\ \cup\ ]1, \infty[$$

Les solutions à $x^2 = x \cos x$ sont dans $[0, 1]$.

• On peut écrire:

$$x^2 - x\cos x = x\,(x - \cos x) = 0$$

On sait que $x=0$ est une solution.

On cherche maintenant une solution à $x-\cos x=0$

Donné que $x=0$ n'est pas solution de $x-\cos x=0$, on doit avoir

$x \in]0,1]$.

On considère $f: [0,1] \to x-\cos x$

$$f(x)=x-\cos x$$

f est continue (somme des fonctions continues).

D'autre part $f(0)=0-\underbrace{\cos 0}_{1}=-1$

$$f(1)=1-\cos 1 > 1-\overbrace{\cos 0}^{1}=0 \Rightarrow f(x)>0$$

$\cos 1<\cos 0$ ($\cos(x)$ strictement décroissante en $[0,\pi/2]$)

Alors on peut appliquer Bolzano pour conclure $\exists x \in]0,1[$

tel que $x-\cos x=0$.

- Pour voir que cette dernière solution est unique, on suppose $\exists\, x \neq y$ tel que $x=\cos x$, $y=\cos y$.

On peut supposer $x<y$. Alors, si on retranche les équations

$$0 > x-y=\cos x-\cos y$$

$$\Leftrightarrow \cos y>\cos x$$

Étant donné que $\cos x$ est décroissante en $[0,1]$,

on est arrivé à une contradiction.

Alors $\exists!\, x_0 \in]0,1[$ tel que $x_0-\cos x_0=0$

Les deux solutions (uniques) à $x^2=x\cos x$ sont:

$$x=0,\quad x=x_0$$

iii) a) . On considère $a_n > 0$ (le cas $a_n < 0$ se résout de la même manière).

On définit: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Étant donné que $a_n > 0$, et n est impair

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{n \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Alors par la définition de fonction divergente à $+\infty$ et $-\infty$, si on prend $A^+ > 0$ et $A^- < 0$, $\exists$ M et m tels que $\forall x > M$, $f(x) > A^+$ et $\forall x < m$, $f(x) < A^-$. Alors si on choisit $a > \max(M, |m|)$, on a que:

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$$

est continue (c'est un polynôme) et

$$f(-a) < A^- < 0 \quad \text{et} \quad f(a) > A^+ > 0$$

Alors, par le théorème de Bolzano $\exists\, x_0 \in]a, a[$ tel que $f(x_0) = 0$; x_0 est solution de l'équation.

On peut faire une construction analogue pour $a_n < 0$.

b) Maintenant n est pair. On définit à nouveau:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_n$$

On suppose $a_n > 0$ (même raisonnement pour $a_n < 0$)

Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Comme dans le cas précédente, on peut trouver $m<0$ tel que $\forall x<m$, on a $f(x)>0$ et $M>0$, tel que $\forall x>M$ on a $f(x)\geq 0$

On choisi $a<m$ et $b>M$ et on define :

$$f^-: [a,0] \to \mathbb{R} \qquad f^-(x) = f(x)$$

$$f^+: [0,b] \to \mathbb{R} \qquad f^+(x) = f(x)$$

f^+ et f^- son continues, avec :

$$\begin{cases} f^-(a) = f(a) > 0 \\ f^-(0) = a_0 < 0 \end{cases}$$

En effet $a_n>0$, et étant donné que $a_n a_0 < 0 \Rightarrow a_0 < 0$

Alors par Bolzano $\exists\, x_1 \in [a,0]$ tel que

$$f^-(x_1) = 0 \Rightarrow a_n x_1^n + \dots + a_0 = 0$$

On a aussi :

$$\left.\begin{array}{l} f^+(0) = a_0 < 0 \\ f^+(b) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_2 \in [0,b] \text{ tel que } f_2(x_2) = 0$$

Alors $a_n x_2^n + \dots + a_0 = 0$

Si $a_n < 0$ et $a_0 > 0$ la résolution est analogue.

Ex 5. (Théorème des valeurs intermédiaires et points fixes)

i) On pose $I = [0,1]$ et on se donne une fonction continue $f : I \to I$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution, autrement dit que $g(x) = f(x) - x$ s'annule (on dit que f a un "point fixe").

ii) Soit $I = [a,b]$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(I) \supset I$. Montrer que f a au moins un point fixe.

iii) Montrer que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et décroissante, l'équation $f(x) = x$ a une unique solution.

Sol : Si on considère la fonction identité $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $id(x) = x$, on a que $g = f - id$ est continue.

On procède point par point.

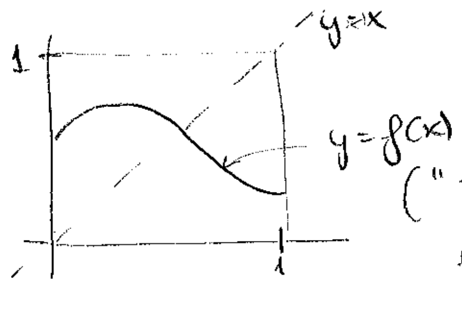
i) Si $g(0) = 0$ ou si $g(1) = 0$, on a déjà une solution et on a fini. On suppose que ce n'est pas le cas.

Alors $g(0) = \underbrace{f(0)}_{>0} - 0 > 0$ et $g(1) = \underbrace{f(1)}_{<1} - 1 < 0$

Le Théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors que g s'annule en au moins un point.

Ce point est solution de $f(x) = x$.

Visuellement :



("toute fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ doit traverser la diagonale de $[0,1] \times [0,1]$

(ii) La condition $I \subset f(I)$ implique $a \in f(I)$, $b \in f(I)$ et alors $\exists\, u, v \in I$ tels que $f(u) = a$ et $f(v) = b$.

Si $u = a$ ou $v = b$, on a un point fixe.

Si ce n'est pas le cas, alors

- $g(u) < 0$: En effet,

$$g(u) = \underbrace{f(u)}_{a} - u = a - \underbrace{u}_{\substack{\in [a,b] \\ \neq a}} < 0 \qquad \left.\begin{matrix} \in [a,b] \\ \neq a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a < u$$

- $g(v) > 0$: En effet

$$g(v) = \underbrace{f(v)}_{b} - v = b - \underbrace{v}_{\substack{\in [a,b] \\ \neq b}} > 0 \qquad \left.\begin{matrix} \in [a,b] \\ \neq b \end{matrix}\right\} \Rightarrow v < b$$

Alors, comme g est continue, elle s'annule en un point entre u et v, qui est point fixe de f.

(iii) • Si $f(0) = 0$, 0 est une solution.

- Si $f(0) > 0$, on a $g(0) = f(0) - 0 > 0$, et $\forall x > 0$ on a

$$g(x) = f(x) - x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{décroissante}}}{\leq} f(0) - x$$

si on prend $\lim_{x \to +\infty}$, on a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Donc g passe des valeurs positifs ($g(0) > 0$) à des valeurs négatives pour x suffisamment grand. Alors vu que g est continue elle doit s'annuler et on a un point fixe de f.

• Si $f(0) < 0$, on a $g(0) = f(0) - 0 < 0$

et $\forall x < 0$, $g(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{decroissante}} - x \geq f(0) - x$

Donc
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

Alors pour x suffisamment petit g devient positive et $g(0) < 0$, donc g s'annule quelque part.

Pour montrer l'unicité, on note que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ satisfait pour $x_1 < x_2$:
$$g(x_1) = \underbrace{f(x_1)}_{\geq f(x_2)} \underbrace{- x_1}_{> -x_2} > f(x_2) - x_2$$

donc g est <u>strictement</u> décroissante (même si f est seulement décroissante). Alors g est injective et par conséquence elle ne peut pas s'annuler deux fois.

$$\underbrace{(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))}_{\text{injectivité}}$$

Ex. 5. i) On pose $I=[0,1]$ et on se donne une fonction continue $f : I \to I$. Montrer que l'équation $f(x)=x$ a au moins une solution, autrement dit que $g(x) = f(x) - x$ s'annule (on dit que f a un "point fixe").

ii) Soit $I=[a,b]$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $I \subset f(I)$. Montrer que f a au moins un point fixe.

iii) Montrer que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et décroissante, l'équation $f(x)=x$ a un unique solution.

Sol:

i) On considère $g = f - I$, c.à.d $g : \begin{array}{l} I \to I \\ x \mapsto f(x) - x \end{array}$

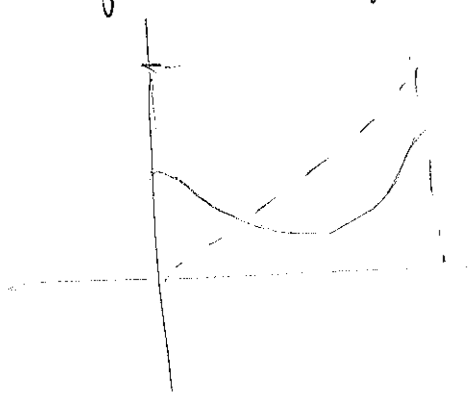
g est continue sur I.

Si $g(0)=0$ ou $g(1)=0$, on a une solution. Et on arrête.

Sinon, $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \in]0,1] \Rightarrow g(0) > 0$

$\left.\begin{array}{l} g(1) = f(1) - 1 \\ f(1) \in [0,1[\end{array}\right\} \Rightarrow g(1) < 0$

Par le théorème de valeurs intermédiaires $\exists c \in]0,1[$ tel que $g(c)=0$, $\Rightarrow f(c) = c$



(ii) On a $I \subset f(I)$.

Alors, vu que $a, b \in I$, on a "a, b" $\in f(I) \Rightarrow \exists\, u, v$ t.q. $f(u) = a$, $f(v) = b$ $\in [a,b]$

Avec $g = f - Id$, on voit (si $u = a$ ou $v = b$, on a fini)

$$\left.\begin{array}{l} g(u) = f(u) - u = a - u < 0 \\ g(v) = f(v) - v = b - v < 0 \\ g \text{ continue} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\,]u, v[\text{ avec } g(c) = 0 \Rightarrow \boxed{f(c) = c}$$

(iii)

Existence: Si $f(0) = 0$, $x = 0$ est une solution.

Si $f(0) > 0$, on a:

$$g(0) = f(0) - 0 > 0$$

Pour $x > 0$

$$g(x) = f(x) - x \overset{f \text{ décroissante}}{\leq} f(0) - x \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

Alors $\exists\, y \in]0, +\infty[$ $g(y) < 0$. On a $g(0) > 0$, $g(y) < 0$, g continue

$\Rightarrow \exists\, c \in]0, y[$ où $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - c = 0$

Si $f(0) < 0$, on a $g(0) < 0$ et, pour $x \leq 0$

$$g(x) = f(x) - x \geq f(0) - x \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

$\Rightarrow \exists\, z \in]-\infty, 0[$, où $g(z) > 0$. Donc $\left.\begin{array}{l} g(z) \geq 0,\ g(0) = 0 \\ g \text{ continue} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c \in]-\infty, 0[$ où $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

Unicité: f décroissante $\Rightarrow g$ strictement décroissante, car x est strictement décroissante.

c.à.d $x < y \Rightarrow g(x) > g(y)$. (*) On raisonne par l'absurde:

Si on a $x < y$ avec $g(x) = g(y)$, ceci est en contradiction avec (*). Alors, il y a une seule solution.

8.- (Ensembles ouvertes / fermés et continuité). Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, montrer que l'image réciproque d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert. Montrer que l'image réciproque d'un ensemble fermé est un ensemble fermé.

(Rappel : un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est ouvert si tout point $x \in I$ est intérieur, c'est à dire, si $\forall x \in E$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset E$; un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est fermé si tout point de l'adhérence $\bar{E}$ appartient aussi à E ; c'est-à-dire, si tout point $x \in \mathbb{R}$ pour lequel $\forall \varepsilon > 0$ on a $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap E = \phi$, appartient aussi à E).

Sol :

On considère $O \subset \operatorname{Im} f$ ouvert.

On va voir que $f^{-1}(O)$ est ouvert.

Soit $x_0 \in f^{-1}(O) \Rightarrow f(x_0) = y_0 \in O$.

On veut montrer que x_0 est un point intérieur de $f^{-1}(O)$ et pour ça on va construire un $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset f^{-1}(O)$.

Vu que O est un ouvert, on a que $y_0 \in \mathring{O} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tel que $]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\subset O$. (*)

Étand donné que f est continue, $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$\forall x \in |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ on a}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$$

Vu (*) on a $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ on a $f(x) \in O$

C'est à dire on a vu que $\forall x_0 \in f^{-1}(O)$ $\exists \delta>0$ tel que

$]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset f^{-1}(O) \Rightarrow x_0 \in Int(f^{-1}(O))$

C'est à dire $f^{-1}(O) \subset Int(f^{-1}(O)) \Rightarrow f^{-1}(O) = Int(f^{-1}(O))$

$f^{-1}(O)$ ouvert.

On a montré : f continue $\Rightarrow$ ($\forall O$ ouvert, $f^{-1}(O)$ ouvert)

- Le réciproque est aussi vrai (même si l'énoncé ne le demande pas, c'est intéressant de le voir).

On va montrer :

$$(\forall O \text{ ouvert} \Rightarrow f^{-1}(O) \text{ ouvert}) \Rightarrow f \text{ continue}.$$

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 = f(x_0)$.

On prend $\varepsilon>0$ et l'ouvert $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$

Par hypothèse $f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[)$ est un ouvert,

alors $x_0 \in f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[)$ est intérieur $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \delta>0$ tel que

$$]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[)$$

$\Leftrightarrow$ $\forall x$, tel que $|x-x_0|<\delta$, on a $f(x) \subset]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$

$\Leftrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

On a alors montré que $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ tel que

$\forall x$ tel que $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

f est continue $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a montré alors une caractérisation de la continuité en termes de l'image réciproque par f des ouverts :

$$f \text{ continue} \iff (\forall O \text{ ouvert} \Rightarrow f^{-1}(O) \text{ ouvert})$$

$\vdash\!\dashv$

On va montrer que cette caractérisation marche aussi pour des fermés.

Pour ça d'abord on montre :

$$O \subset \mathbb{R},\ O \text{ ouvert} \Rightarrow \mathbb{R}\setminus O \text{ fermé}$$

$$F \subset \mathbb{R},\ F \text{ fermé} \Rightarrow \mathbb{R}\setminus O \text{ ouvert.}$$

- $O \subset \mathbb{R}$, O ouvert $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus O$ fermé

On note $\mathbb{R} = O \cup \mathbb{R}\setminus O$ et $O \cap \mathbb{R}\setminus O = \emptyset$

Si O est ouvert on va montrer que $\mathbb{R}\setminus O$ est fermé.

Soit $x \in \overline{\mathbb{R}\setminus O}$, on va montrer que $x \in \mathbb{R}\setminus O$

Si $x \in \overline{\mathbb{R}\setminus O}$ on a bien $x \in O$ ou bien $x \in \mathbb{R}\setminus O$.

Si $x \in O$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[\subset O$, parce que O est ouvert. Alors $\exists\, \delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[\cap \mathbb{R}\setminus O = \emptyset$

Mais ceci est un contradiction avec le fait que

$$x \in \overline{\mathbb{R}\setminus O} \iff \forall \delta > 0\ ]x-\delta, x+\delta[\cap \mathbb{R}\setminus O \neq \emptyset.$$

Alors $x \in \mathbb{R}\setminus O$, $\forall x \in \overline{\mathbb{R}\setminus O}$, donc $\overline{\mathbb{R}\setminus O} \subset \mathbb{R}\setminus O$

$$\iff \overline{\mathbb{R}\setminus O} = \mathbb{R}\setminus O$$

$\mathbb{R}\setminus O$ fermé.

- $F \subset \mathbb{R}$, F fermé $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus F$ ouvert.

On considère $x \in \mathbb{R} \setminus F$.

On va supposer que $x \notin \mathrm{Int}(\mathbb{R} \setminus F)$ et on va arriver à une contradiction

Si $x \notin \mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus F) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}\setminus F) \neq \emptyset$

Mais $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}\setminus F) = F$, alors on est en train de dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap F \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{F}$$

Mais F est fermé, alors $F = \overline{F}$ est $x \in F$.

Mais ceci en contradiction avec le fait que $x \in \mathbb{R} \setminus F$.

Alors on doit avoir $x \in \mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus F)$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus F$.

C'est à dire $\mathbb{R}\setminus F \subset \mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus F) \Leftrightarrow \mathbb{R}\setminus F = \mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus F)$

et $\mathbb{R}\setminus F$ est ouvert.

//

Maintenant pour montrer :

$$f \text{ continue} \Leftrightarrow (\forall F \text{ fermé} \Rightarrow f^{-1}(F) \text{ fermé})$$

on utilise le résultat pour les ouverts:

- f continue $\Rightarrow (\forall F$ fermé $\Rightarrow f^{-1}(F)$ fermé$)$

On considère F fermé, alors $\mathbb{R}\setminus F$ est ouvert. Vu que f est continue $f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F)$ est ouvert $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F)$ fermé

D'autre côté, vu que f est une application $(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ f(x))$

on a $f^{-1}(F) \cup f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F) = \mathbb{R}$ et $f^{-1}(F) \cap f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F) = \emptyset$

Donc $\mathbb{R}\setminus f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F) = f^{-1}(F)$.

On a alors $f^{-1}(F)$ fermé.

- ($\forall F$ fermé $\Rightarrow f^{-1}(F)$ fermé) $\Rightarrow f$ continue

Donnez O ouvert ; on a $\mathbb{R} \setminus O$ fermé. Par hypothèse

$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus O)$ fermé $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus O)$ ouvert

Mais $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus O) = f^{-1}(O)$ alors $f^{-1}(O)$ ouvert.

On a ainsi $\forall O$ ouvert, $f^{-1}(O)$ ouvert $\Rightarrow f$ continue

$\square$

7- Dans l'exercice 4 de la feuille de TD1, on a construit des applications bijectives entre l'intervalle $[0,1]$ et les intervalles $]0,1[$, $[0,1[$, $]0,1]$, pour montrer qu'il s'agit d'ensembles équipotents. Est-ce que ces bijections sont continues ? Est-ce qu'on peut construire des bijections continues entre ces intervalles ? Entre lesquels ?

Sol : a) • $f_1 : [0,1] \to]0,1[$

Non continue : $f^{-1}(]0,1[) = [0,1]$ n'est pas un ouvert

(Aussi $f([0,1])$ est un intervalle fermé borné (compacte))

• $f_2 : [0,1] \to]0,1]$ et $f_3 : [0,1] \to [0,1[$

Non continue : $]0,1]$ et $[0,1[$ ne sont pas compacts.

b) Si maintenant on considère :

• $g_1 : [0,1[\to [0,1]$

non-continue, parce que la preimage de $[0,1]$ doit être un fermé.

• $g_2 : [0,1[\to]0,1[$

Non continue, parce que la preimage de $]0,1[$ doit être un ouvert

• $g_3 : [0,1[\to]0,1]$

On peu avoir de fonction continue. e.g : $g_3(x) = 1-x$

c) • $h_1 :]0,1[\to [0,1]$

Non-continue parce que la préimage de $[0,1]$ doit être ouvert

• $h_2 :]0,1[\to]0,1[$

On peut la faire continue.

• $h_3 :]0,1[\to [0,1[$ ou $h_3 :]0,1[\to]0,1]$

h_3 ne peut pas être continue. La raison est que une bijection continue f doit avoir une réciproque f^{-1} continue (on dit que f est un homeomorphisme). Dans ce cas $h_3^{-1}(]0,1[)$ doit être un ouvert.

On va voir $f :]a,b[\to \mathbb{R}$
bijective et continue $\Rightarrow f^{-1}$ continue.

On considère $C \subset]a,b[$, C fermé. Vu que C est borné, il est compact. Alors $f(C)$ est compact (f continue). Alors $f(C)$ est fermé (et borné).

Alors f envoie ensembles fermés en ensembles fermés.
Vu que f est bijective, alors f envoie aussi ensembles ouverts en ensembles ouverts. En effet, soit $O \subset]a,b[$ ouvert; on va montrer que $f(O)$ est ouvert. Soit $y \in f(O)$, alors $\exists x_0 \in O$ t.q. $f(x_0) = y$.
On va montrer que $f(x)$ est un point intérieur de $f(O)$.
Donné que $x \in O$, O ouvert, $\exists \delta > 0$ tel que $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset O$.
On considère $[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}] \subset]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset O$. $[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}]$ est fermé, alors on a vu que $f[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}]$ est fermé, alors $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f([x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}]) = [\alpha, \beta]$. (par injectivité de f, nécessairement $\alpha \neq \beta$). On a trois possibilités : i) $f(x_0) = \alpha$, ii) $f(x_0) = \beta$, ou iii) $f(x_0) \in]\alpha, \beta[$.
Si $f(x_0) = \alpha$, alors $\exists x^- < x_0$, $x^+ > x_0$ avec $f(x^-) = f(x^+)$, en contradiction avec l'injectivité de f. Alors $f(x_0) \neq \alpha$. De même pour $f(x_0) \neq \beta$.
Alors $f(x_0) \in]\alpha, \beta[\subset [\alpha, \beta] = f[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}] \subset f(O)$.
On peut choisir $\varepsilon = \min\{\frac{|\alpha - f(x_0)|}{2}, \frac{|\beta - f(x_0)|}{2}\} > 0$ et $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[\subset]\alpha, \beta[\subset f(O)$. Alors $f(x_0) = y$ est intérieur de $f(O)$, $\forall y \in O \Rightarrow$
$\Rightarrow f(O)$ ouvert.

On a vu f continue et bijective $\Rightarrow$ (O ouvert $\Rightarrow f(O)$ ouvert)
Alors si on considère f^{-1}, et on utilise que $(f^{-1})^{-1} = f$,
on a que $\forall\, O \subset]a,b[$ ouvert, $(f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$ est ouvert.
Alors par l'exercice 5, f^{-1} est continue.

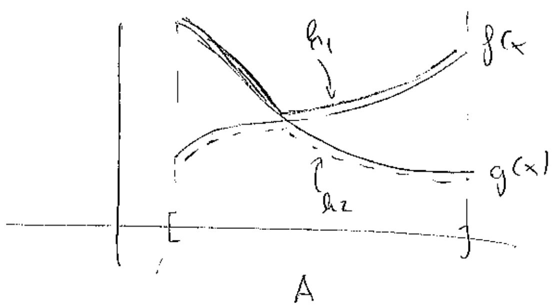
(On peut aussi montrer ce résultat en montrant que f continue et injective $\Rightarrow$ f strictement monotone).

8. Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ continues et les fonctions

$$h_1 : A \to \mathbb{R}, \text{ avec } h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
$$h_2 : A \to \mathbb{R}, \text{ avec } h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Montrer que les fonctions h_1 et h_2 son continues.

Sol:



Vu que f et g sont continues $\forall x_0 \in A$, on a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ et $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.

On suppose d'abord x_0 tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On choisi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Alors on a $\forall x$ tel que $|x - x_0| < \delta$

$$|h_1(x) - h_1(x_0)| = |\max\{f(x), g(x)\} - h_1(x_0)|$$

Vu que $\max\{f(x), g(x)\}$ est bien $f(x)$ ou bien $g(x)$, on a nécessairement $|\max\{f(x), g(x)\} - h_1(x_0)| \leq \ldots$

$$\leq \max\{|f(x) - h_1(x_0)|, |g(x) - h_1(x_0)|\}$$

Vu que $h_1(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$, on a :

$\forall x$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a

$$|h_1(x) - h_1(x_0)| \leq \max\{|f(x) - f(x_0)|, |g(x) - g(x_0)|\} < \varepsilon$$

Alors h_1 est continue en x_0.

Si x_0 est tel que $f(x_0) > g(x_0)$, alors $(f-g)(x_0) > x_0$. Vue que $f-g$ est continue, $\exists\ \delta_3 > 0$ tel que $\forall x$ tel que $|x - x_0| < \delta_3$ on a $(f-g)(x) > 0$ (Conservation du signe). Alors dans $]x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3[$ on a $f(x) > g(x) \Rightarrow h_1(x) = f(x)$. Alors si on prend $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3\}$ on a $\forall\ x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$$|h_1(x) - h_1(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

et h_1 est continue.

De la même manière pour x_0 tel que $f(x_0) < g(x_0)$.

Alors h_1 est continue en A.

De manière analogue pour h_2 (ou simplement noter que si f et g continues $\Rightarrow$ $-f$ et $-g$ continues et

$h_2 : A \to \mathbb{R}$, $\quad h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\} = -\max\{-f(x), -g(x)\}$,

et on applique le résultat précédent).

Ex. 9 i) Étant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $f(x) = x^2$, montrer que f n'est pas uniformément continue.

ii) Étant donnée $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ un fonction continue telle que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$$

montrer que f n'est pas uniformément continue.

iii) Étant donnée $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

montrer que f est uniformément continue.

Sol : Rappel : $f : A \to \mathbb{R}$, uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x, y \in A$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

i) On considère $\varepsilon_0 > 0$.

On considère maintenant un δ quelconque, mais fixe.

On considère maintenat x et y tels que $0 < x < y$, $|x-y| < \delta$.

Si on prend $n \in \mathbb{N}$ on considère $x_n = x + n\delta$ et $y_n = y + n\delta$.

On a $|x_n - y_n| = |x + n\delta - (y + n\delta)| = |x - y| < \delta$.

D'autre part (noter $x_n < y_n$) :

$$\begin{aligned} |x_n^2 - y_n^2| &= y_n^2 - x_n^2 = (y + n\delta)^2 - (x + n\delta)^2 \\ &= y^2 + 2y\delta n + \cancel{n^2\delta^2} - x^2 - 2x\delta n - \cancel{n^2\delta^2} \\ &= y^2 - x^2 + 2(y - x)\delta n \end{aligned}$$

On voit qu'il pour n suffisement grand cette quantité est aussi grand qu'on veut.

Plus spécifiquement, donné $\varepsilon - (y^2 - x^2) \in \mathbb{R}$ et $2(y-x)\delta > 0$, par la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que

$$2(y-x)\delta n > \varepsilon - (y^2 - x^2)$$

Autrement dit, donné $\varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ $\exists x_n; y_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\underline{|x_n^2 - y_n^2|} = y^2 - x^2 + 2(y-x)\delta n \geq y^2 - x^2 + \varepsilon - (y^2 - x^2) = \underline{\varepsilon}$$

Alors f n'est pas uniformément continue.

Alternativement, on choisit $\varepsilon = 2$ et un $\delta > 0$ arbitraire.
On prend un entier $n_\delta \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{n_\delta} < \delta$ (archimédienne),
On considère $x_\delta = n_\delta + \frac{1}{n_\delta}$ et $y_\delta = n_\delta$ Alors

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n_\delta} < \delta \text{ et } |x_n^2 - y_n^2| = x_n^2 - y_n^2$$
$$= \left(n_\delta + \frac{1}{n_\delta}\right)^2 - n_\delta^2$$
$$= n_\delta^2 + 2 + \frac{1}{n_\delta^2} - n_\delta^2 = 2 + \frac{1}{n_\delta^2} > \varepsilon$$

ii) $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, continue, avec $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$.
Soit $\varepsilon = 1 > 0$
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on considère $x_1 \in]0, \frac{1}{n}[$.

On prend $M = f(x_1) + 1$. Vu que f diverge quand $x \to 0^+$, $\exists \delta > 0$ tel que pour $x \in 0 < x < \delta$, $f(x) > M = f(x_1) + 1$.
Alors $f(x) - f(x_1) > 1$. On prend $x_2 \in]0, \delta[$. Ainsi

$$|x_1 - x_2| < \frac{1}{n}, \text{ mais } |f(x_2) - f(x_1)| = f(x_2) - f(x_1) > 1 = \varepsilon$$

Ça suffit pour montrer que f n'est pas uniformément continue.

(ii) $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ continue, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Sol: La stratégie pour montrer que f est uniformément continue est donné un $\varepsilon > 0$ séparer $[0,\infty[$ dans un intervalle suffisamment lointain où les différences de la fonction sont controllés et un intervalle compact où la fonction est uniformément continue parce qu'elle continue (Th. Heine-Cantor)

Soit $\varepsilon > 0$. Vu que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \geq M$ $f(x) < \frac{\varepsilon}{3}$.

On considère la fonction : $\bar{f} : [0,M] \to \mathbb{R}$
$$\bar{f}(x) = f(x).$$

$\bar{f}$ est continue dans un compacte, alors par le théorème de Heine-Cantor elle est uniformément continue.

- Cas $x, y \in [0,M]$, $\exists \delta > 0$ tel que $|x-y| < \delta \Rightarrow |\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
$$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

- Cas $x \geq M$, $y \geq M$,
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

- Cas $x \in [0,M[$, $y > M$
$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(M) + f(M) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(M)| + |f(M)| + |f(y)| \\ &= |\bar{f}(x) - \bar{f}(M)| + f(M) + f(y) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi f est uniformément continue.

10- (Continuité uniforme et Lipschitz). Étant donnée la fonction $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, avec $f(x) = \sqrt{x}$, montrer que:

i) f est uniformément continue.

ii) f n'est pas Lipschitz continue.

Sol:

i) Soit $\varepsilon > 0$.

On prend $\delta = \varepsilon^2$.

On prend $x, y \in [0,\infty[$, avec $|x-y| < \delta$.

On separe deux cas:

- $x, y \in [0,\delta[$. Vu que $\sqrt{x}$ est strictly croissant:

$$|f(x) - f(y)| < f(\delta) - f(0) = \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

- Bien $x \in [\delta,\infty[$ ou $y \in [\delta,\infty[$. Alors, $\max(x,y) \geq \delta$

Alors,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{\max(x,y)} + \sqrt{\min(x,y)}}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x-y}{\sqrt{\max(x,y)}}\right| \leq \left|\frac{x-y}{\sqrt{\delta}}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

Alors, pour $\varepsilon > 0$, $\forall x, y \in [0,\infty[$, $|x-y| < \delta = \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$

f uniformément continue.

ii) Lipschitz-contine si $\exists C > 0, \forall x, y$; $|f(y) - f(x)| \leq C|x-y|$

Si on prend $x = 0$, $y = \frac{1}{n}$, on a:

$$|f(\tfrac{1}{n}) - f(0)| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n}\left|\frac{1}{n} - 0\right|.$$

Alors $\nexists C$ tel que $|f(y) - f(x)| \leq C|x-y|$, $\forall x, y \in [0,\infty)$

(Pour même C donné, il suffit de prende n avec $\sqrt{n} > C$.)