2019/20

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

TD4

Les exercices marqués avec $(*)$ sont d'approfondissement/complémentaires. Il est conseillé de les abordés après avoir maîtrisé le reste des exercices.

1. (*Dérivée et fonctions élémentaires*). Dériver la règle de dérivation des fonctions x^n, $\sin(x)$, $\ln(x)$.

   [*Remarque* : pour $\ln(x)$, accepter $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$]

2. (*Dérivée et opérations entre fonctions*). Dériver les expressions pour la dérivée du produit des fonctions, quotient des fonctions et composition de fonctions dérivables.

3. (*Dérivée et fonction réciproque*).
   i) Étant donnée $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, avec $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ et f^{-1} dérivable, montrer
   $$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \ , \ \forall x \in I \ .$$
   [*Remarque* : l'hypothèse sur la différentiabilité de f^{-1} est trop fort. On peut montrer qu'il suffit de supposer f dérivable en I avec $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ pour conclure que f^{-1} est dérivable en $f(I)$ avec l'expression ci-dessus pour sa dérivée].
   ii) Dériver les expressions pour les dérivées de e^x, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$.

4. Soit $f : A \to \mathbb{R}$, avec
   $$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \ .$$
   i) Quel est le domaine de définition A de f ? Quel est l'image de f ? Quelle restriction de f est une bijection ?
   ii) Calculer f'. Est-ce que f^{-1} est dérivable ? Calculer $(f^{-1})'$.
   iii) Trouver c tel que, pour $x > 1$ on ait
   $$f(x) = -\arctan(x) + c \ .$$
   Trouver c tel que l'expression précédente soit valable pour $x < 1$.

5. Déterminer la classe $\mathcal{C}^n(I)$, pour les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec
   $$f_n(0) = 0 \quad , \quad f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \neq 0 \ .$$

6. (*) (*Formule de Leibnitz*). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, n fois dérivables sur I, où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le produit fg est n fois dérivable sur I et la dérivée d'ordre n de $f \cdot g$ est donnée par
   $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \ .$$

7. (*Inégalité des accroissements finis*). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < \infty$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
   i) Montrer :

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \ .$$

   ii) Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ est Lipschitz.

8. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :
   i) $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.
   ii) $e^x \geq 1 + x$ pour tout x réel.
   iii) $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
   iv) $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
   v) $|x-y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2|x-y|$ pour $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

9. (*) (*Application du théorème des accroissements finis : croissance de la série harmonique*). Montrer :
   i) Pour tout $x > -1$

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \ ,$$

   donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{1+n} < \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \ .$$

   ii) Prouver par récurrence :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1.$$

   iii) Utiliser les points i) et ii) pour montrer :
      a) La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers ∞.
      b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 \ .$$

      c) La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \ ,$$

      est décroissante.
      d) Pour tout $n \in N^*$

$$0 < \sum_{k=1}^{n} u_k < w_n \ .$$

e) La limite (constante d'Euler-Mascheroni)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) ,$$

existe et $\gamma \in [0, 1]$.

10. (*Théorème des accroissements finis généralisé*). Étant donné $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues en $[a, b]$ et dérivables en $]a, b[$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)$$

[*Suggestion* : Considérer la fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec

$$h(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{pmatrix} ,$$

et appliquer le théorème de Rolle. Noter que la fonction g' peut s'anuller].

11. (*Valeurs approchées*).
   i) Calculer une valeur approchée de $\sin(0,1)$ en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction sinus au point 0. Donner une majoration de l'erreur.
   ii) Même question pour $\arctan(1,01)$ en écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 au point 1.

12. (*Application de la formule de Taylor-Lagrange*). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.
   i) Estimer l'erreur du calcul ϵ_n de $\sin(x_o)$, $x_o \in \mathbb{R}$, par le polynôme de Taylor à l'ordre n en x_o et justifier que $\forall \delta > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $|\epsilon_n| < \delta$.
   [*Suggestion* : montrer que, étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n \neq 0$, tel qu'il existe $k \in]0, 1[$ satisfaisant $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$].
   ii) Calculer $\sin(1)$ avec une erreur ϵ tel que $|\epsilon| < 10^{-5}$.

13. Montrer en utilisant la formule de Taylor-Lagrange que :
   i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x réel positif, $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$
   ii) Pour tout $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x)$
   iii) Pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$
   iv) Pour tout x réel, $|\sin x - x| \leq \dfrac{|x|^3}{6}$
   v) Pour tout $|x| < \pi$, $\ln(1 + \cos x) \leq \ln 2 - \dfrac{x^2}{4}$

14. (*Développements limités)*. Montrer que si f admet un développement limité en x_o à l'ordre n, alors il est unique.