TD 4

1.- Dériver la règle de dérivation de x^n, $\sin(x)$, $\ln(x)$.

Sol:

· $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

On utilise directement la définition de la dérivée de f dans un point x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ainsi:

$$f_1'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \underset{\substack{\text{Binôme} \\ \text{Newton}}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^n} + x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n - \cancel{x^n}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(x^{n-1} + \overset{\to 0}{\cancel{h}} \left(\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \dots h^{n-1} \right) \right) = x^{n-1}$$

Alors:

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

Remarque: Pour $(x^a)'$ c'est mieux de passer d'abord par la dérivée du logarithme. Sinon, on peut aussi utiliser la dérivée de la réciproque pour $(x^{1/n})'$ et après la dérivée de la composition pour $(x^{\frac{m}{n}})'$. Et finalement utiliser un passage à la limite pour $(x^a)'$, $a \in \mathbb{R}$.

• $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_2(x) = \sin(x)$

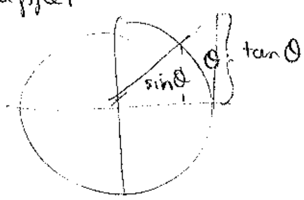
$$f_2'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x(1-\cos h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h}\right) - \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,(1-\cos h)}{h}$$

$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)}{h}$$

Rappel :



$\sin\theta \leq \theta \leq \tan\theta$

$1 \leq \frac{\theta}{\sin\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$

$1 \geq \frac{\sin\theta}{\theta} \geq \cos\theta$ $\Big\}$ $\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

gendarmes

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin^2\theta}{\theta\;1+\cos\theta}$$

$$= \underbrace{\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}}_{1} \underbrace{\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}_{0} = 0$$

Alors,

$$f_2'(x) = \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 = \cos x$$

De la même manière pour $\cos(x)$, ou simplement notant $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ et en utilisant la composition

- $f_9 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$f_9(x) = \ln x$

$$f_9'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{\bar{h}}}\right)^{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\bar{h}=\frac{h}{x} \\ x>0}}{=} \lim_{\bar{h}\to 0} \ln\left(\left(1+\bar{h}\right)^{\frac{1}{\bar{h}}}\right)^{1/x}$$

$$\underset{\substack{\ln(x) \text{ et } x^a \\ \text{continues}}}{=} \ln\left(\lim_{\bar{h}\to 0} (1+\bar{h})^{\bar{h}}\right)^{1/x} = \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}$$

hypothèse: prouver! $\to$ plus général que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\lim_{h\to 0} (1+\bar{h})^{\frac{1}{\bar{h}}} = e$

Ainsi,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

2.- Dériver les expressions pour la dérivée du product des fonctions, quotient des fonctions et composition des fonctions dérivables.

Sol:

- $$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x)$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} f(x+h)}_{\substack{f(x) \\ f \text{ derivable} \\ \Rightarrow f \text{ continue}}} \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\substack{g'(x) \\ (g \text{ dérivable})}} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{f'(x) \\ f \text{ dérivable}}} g(x)$$

$$= f g'(x) + f'(x) g(x)$$

Alors

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f g'(x)$$

• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$ Hypothèse $g(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) - f(x) \lim_{x\to h}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}{g(x+h)\, g(x)}$$

On utilise f dérivable, g dérivable ($\Rightarrow g$ continue), $g(x) \neq 0$:

$f \cdot g$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

- $(f \circ g)'(x)$.

Noter : $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$

$Im(g) \subset J$

Alors :

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

= Vu que g est dérivable : $g(x+h) - g(x) = h\,g'(x) + o(h)$

$$g(x+h) = g(x) + \underbrace{h\,g'(x) + o(h)}_{\bar{h}}$$

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{\bar{h} \to 0} \frac{f(g(x) + \bar{h}) - f(g(x))}{\bar{h}} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$\uparrow$ g continue

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Alors $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

3\. i) Étant donnée $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, avec $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ et f^{-1} dérivable, montrer :

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad , \forall x \in I$$

ii) Dériver les expressions pour les dérivées de e^x, $\arcsin(x)$, $\arctan x$.

Sol :
i) On considère.

$$f^{-1} \circ f = I \iff (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Alors, étant donné que f et f^{-1} sont dérivables (la dernière hypothèse est trop fort, on a :

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Si $f'(x) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

ii) • On considère $y = f(x) = e^x$

Alors $x = f^{-1}(y) = \ln y$

$$f'(f^{-1}(y)) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$$

Si on écrit en fonction de x :

$$f'(x) = e^x$$

C'est à dire : $(e^x)' = e^x$

- On considère $y = f(x) = \arcsin(x)$

$$x = f^{-1}(y) = \sin(y)$$

$$f'(x) = f'(f^{-1}(y)) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{(\sin(y))'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi, $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- On considère $\arctan(x)$.

On le fait maintenant:

$$y = f(x) = \tan(x)$$

$$x = f^{-1}(y) = \arctan(y)$$

$$(\arctan(y))' = (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\tan(x))'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$\left((\tan(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin(x)(-)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

Maintenant il faut l'exprimer en fonction de $y = \tan x$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \iff \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{d}{dx}\arctan\right)(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4.- Soit $f: A \to \mathbb{R}$, avec

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

i) Quel est le domaine de définition A de f? Quel est l'image de f? Quelle restriction de f est un bijection?

ii) Calculer f'. Est-ce que f^{-1} est dérivable? Calculer $(f^{-1})'$.

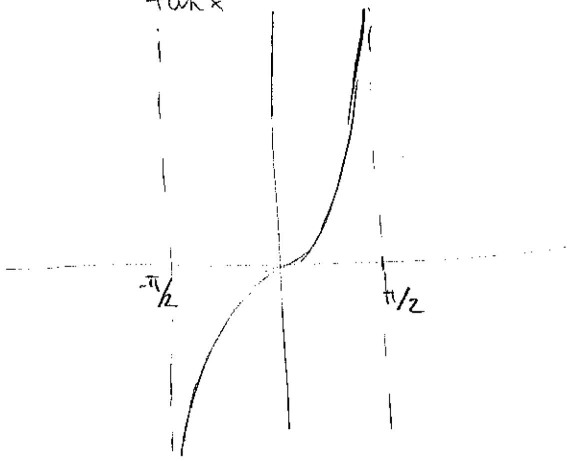
iii) Trouver c tel que, pour $x>1$ on ait

$$f(x) = -\arctan(x) + c.$$

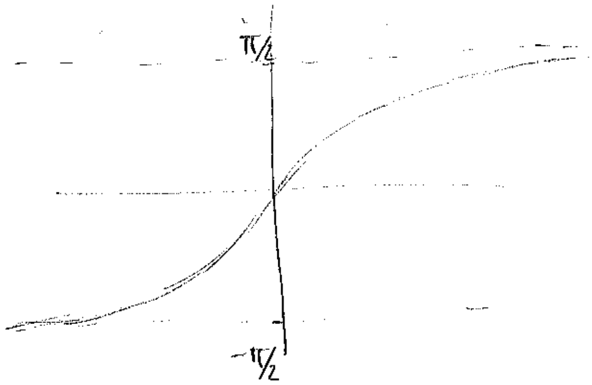
Trouver c tel que l'expression précédente soit valable pour $x<1$.

Sol:

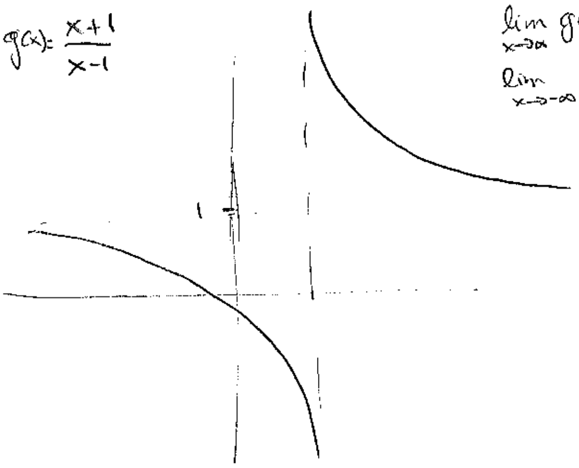
$\tan x$



$h(x)$ arctan x



$g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$



$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$

$$g'(x) = \frac{1\cdot(x-1) - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

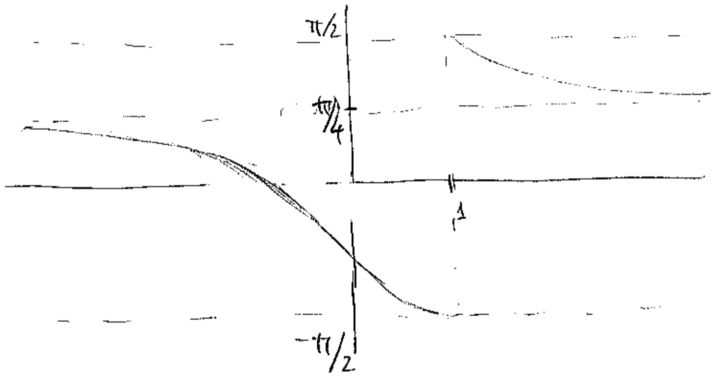
i) $f = h \circ g$

- Domaine de définition: $A = \mathbb{R} - \{1\}$

$\mathrm{Im}(f) \subset \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

$\lim_{x\to\infty} f = \arctan(1) = \pi/4$ $\qquad\qquad \pi/2$

$\lim_{x\to-\infty} f = \arctan(1) = \pi/4$



$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arctan\left(\frac{1+\varepsilon+1}{1+\varepsilon-1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arctan\left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \arctan\Big(\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}_{+\infty}\Big) = \pi/2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \arctan\left(\frac{1+\varepsilon+1}{1+\varepsilon-1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \arctan\left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \arctan\Big(\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}_{-\infty}\Big) = -\pi/2$$

- $\mathrm{Im} f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{\pi/4\}$
- $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{\pi/4\}$
  $x \mapsto \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

  f bijection

(ii) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(x-1) - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^2+(x+1)^2} \cdot \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{\cancel{(x-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{x^2 - \cancel{2x} + 1 + x^2 + \cancel{2x} + 1} \cdot -2 = \frac{-2}{2x^2+2} = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \neq 1$$

f^{-1} est derivable $\forall x \neq 1$, parce que f est dérivable et $f' \neq 0$, $\forall x \neq 1$.

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{1+x^2}} = -(1+x^2)$$

Si on pose :

$$y = f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

on a $(\forall x \neq -1)$

$$\tan y = \frac{x+1}{x-1} \iff \tan y\,(x-1) = x+1 \iff x(1-\tan y) = -1-\tan y$$

$$x = \frac{\tan y+1}{\tan y-1}$$

Alors $(f^{-1})'(y) = -(1+x^2) = -\left(1+\left(\frac{\tan y+1}{\tan y-1}\right)^2\right)$

$$= -\left(\frac{(\tan y-1)^2+(\tan y+1)^2}{(\tan y-1)^2}\right) = -\frac{\tan^2 y - \cancel{2\tan y}+1+\tan^2 y+\cancel{2\tan y}+1}{(\tan y-1)^2}$$

$$= -2\,\frac{1+\tan^2 y}{(\tan y-1)^2}$$

Alors $\boxed{(f^{-1})'(x) = -2\,\frac{1+\tan^2 x}{(\tan x-1)^2}}$

Vérification :

$$f^{-1}(y) = \frac{\tan y+1}{\tan y-1}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{\frac{1}{\cos^2 y}(\tan y-1)-(\tan y+1)\frac{1}{\cos^2 y}}{(\tan y-1)^2} = \frac{\cancel{\tan y}-1-\cancel{\tan y}-1}{\cos^2 y\,(\tan y-1)^2} = \frac{-2}{(\tan y-1)^2\cos^2 y}$$

Si on note :

$$\sin^2 y+\cos^2 y = 1 \iff \tan^2 y+1 = \frac{1}{\cos^2 y}$$

On a :

$$(f^{-1})'(y) = -2\,\frac{1+\tan^2 y}{(\tan y-1)^2} \quad \checkmark$$

• On note :

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

et

$$(-\arctan)'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Alors, f et $-\arctan$ sont primitives de la même fonction.

Elles doivent coïncider à une constante près (voir chapitre suivant), là où elles continues. $f(x) = -\arctan(x) + C$

• Pour $]1, \infty[$, on a :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\lim_{x\to\infty} \arctan(x) + C$$

$$\arctan 1 = -\frac{\pi}{2} + C$$

$$C = \arctan(1) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

Pour $]-\infty, 1[$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) + C$$

$$\arctan 1 = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$C = \arctan(1) - \pi/2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Alors, $\forall x \in]1, \infty[$

$$f(x) = -\arctan x + \frac{3\pi}{4}$$

$\forall x \in]-\infty, 1[$

$$f(x) = -\arctan x - \pi/4$$

Remarque. Noter qu'on récupère la continuité si on considère des autres "branches" de $\arctan(x)$.

5.- Déterminer la classe $C^n(\mathbb{R})$, pour les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec

$$f_n(0) = 0$$
$$f_n(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \neq 0$$

<u>Sol:</u>

On suppose $n \in \mathbb{N}$ (on peut aussi raisonner pour $n \in \mathbb{R}$)

- $n = 0$

$$f_0(0) = 0$$
$$f_0(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \neq 0$$

$\forall x \neq 0$ la fonction est continue, car elle est la composition de fonctions continues.

Pour $x = 0$, on note $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ (et $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.)

On peut a choisir une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tel que $\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + n 2\pi = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

et une deuxième suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tel que $\frac{1}{y_n} = -\frac{\pi}{2} + n 2\pi = (4n-1)\frac{\pi}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On a alors

$$(f_0(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 1$$
$$(f_0(y_n))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sin\left(\frac{1}{y_n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sin\left((4n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow -1$$

avec $x_n \to 0$, $y_n \to 0$.

Alors f_0 n'est pas continue en $x = 0$; $\nexists n$ tel que $f_0 \in C^n(\mathbb{R})$

- $n = 1$

$$f_1(0) = 0$$
$$f_1(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \neq 0$$

$\forall x \neq 0$, $f_1(x)$ dérivable car elle est composition de dérivables,

Alors $f_1(x)$ continue $\forall x \neq 0$.

Pour $x=0$: , vu que $\sin(\frac{1}{x})$ est borné ($|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$), on a

$0 \leq |x \sin\frac{1}{x}| \leq |x|$, $\forall x \neq 0$

Quand $x \to 0$, par le theorème des gendarmes $|x \sin\frac{1}{x}| \to 0$,

alors $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$.

$f_1 \in C^0(\mathbb{R})$.

Pour voir si $f \in C^1(\mathbb{R})$, nous devons Calculer $(f_1)'$ et voir si elle continue.

En $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\frac{1}{x}$

$= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \neq 0$ f_1 est dérivable et $(f_1)'$ est continue.

Pour $x=0$

$(f_1)'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$. n'existe pas.

Alors f_1 n'est pas derivable en $x=0$.

On a , $f_1 \in C^0(\mathbb{R})$, mais n'est dérivable en $x=0$

- $n=2$ $\quad f_2(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$

Comme pour f_1, $\forall x \neq 0$ f_2 est dérivable et $(f_2)'$ est continue en x.

Pour $x=0$, f_2 est continue (même raisonnement), Pour la dervée.

$f_2'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

Alors f_2 est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$

D'autre part, $\forall x \neq 0$

$$f_2'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

De la même manière que pour $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, il n'existe pas $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Alors f_2' n'est pas continue.

C'est a dire $f_2 \in C^0(\mathbb{R})$, dérivable en $x=0$, mais $\notin C^1(\mathbb{R})$.
$\exists f_2'$

- $n=3$

$f_3(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \neq 0$, f_3 est dérivable et f_3' est continue.

Pour $x=0$

$\lim_{x\to 0} f_3 = \lim_{x\to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0) \Rightarrow f_3$ continue

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Si $x \neq 0$

$$f_3'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} + x^3 \cdot -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$$

Et $\lim_{x\to 0} f_3'(x) = 0 = f_3'(0) \Longrightarrow f_3'$ continue en $x=0$

Alors $f_3 \in C^1(\mathbb{R})$

Pour voir si $f_3 \in C^2(\mathbb{R})$,

$$f_3''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_3'(x) - f_3'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 3x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \text{qui n'exist pas.}$$

Alors $\nexists f_3'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $n=4$

$f_4(x) = x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \neq 0$

$f_4'(x) = 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^4\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\frac{1}{x}$

$f_4''(x) = 12x^2 \sin\frac{1}{x} + 4x^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} - 2x\cos\frac{1}{x} + -x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\frac{1}{x}$

$= (12x^2+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x\cos\frac{1}{x}$

En $x=0$

- $\lim_{x\to 0} f_4(x) = 0 = f_4(0)$ continue

- $f_4'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_4(x) - f_4(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} f_4'(x) = \lim_{x\to 0} 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$

$\Big\}$ f_4' continue en $x=0$

- $f_4''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_4'(x) - f_4'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x} - 0}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} f_4''(x) = \lim_{x\to 0} (12x^2+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x\cos\frac{1}{x}$ qui n'existe pas.

Alors f_4'' existe $\forall x \in \mathbb{R}$, mais n'est pas continue.

Alors $f_4 \in C^1(\mathbb{R})$, $\exists f_4''$ mais $f_4 \notin C^2(\mathbb{R})$

- $n=5$

$f_5(x) = x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\forall x \neq 0$

$f_5'(x) = 5x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^5\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = 5x^4 \sin\frac{1}{x} - x^3\cos\frac{1}{x}$

$f_5''(x) = 20x^3 \sin\frac{1}{x} + 5x^4\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} - 3x^2\cos\frac{1}{x} - x^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\frac{1}{x}$

$= (20x^3 + x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 8x^2\cos\frac{1}{x}$

$\exists f_5''$ et elle continue $\forall x \neq 0$

Pour $x=0$

$\lim_{x\to 0} f_5(x) = 0 = f_5(0)$ continue

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_5(x)-f_5(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^4 \sin\frac{1}{x} - x^3\cos\frac{1}{x} - 0}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} f_5'(x) = \lim_{x\to 0} 5x^4 \sin\frac{1}{x} - x^3 \cos\frac{1}{x} = 0$

$\Big\}$ $f_5'(0)$ continue

$f_5''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_5'(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^4\sin\frac{1}{x} - x^3\cos\frac{1}{x}}{x} = 0$ dérivable $\overset{\text{en } 0}{\Rightarrow}$ f_5' continue en 0

$\lim_{x\to 0} f_5''(x) = \lim_{x\to 0} (20x^3 + x)\sin\frac{1}{x} - 8x^2\cos\frac{1}{x} = 0$

Alors f_5'' continue.

$f_5'''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_5''(x) - f_5''(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(20x^3+x)\sin\frac{1}{x} - 8x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$ n'existe pas.

Alors $f_5 \in C^2(\mathbb{R})$ f_5''' n'existe pas.

- Par induction, on peut montrer $n \in \mathbb{N}$

$f_{2n} = x^{2n}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $n \geq 1$

$f_{2n} \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $f_{2n}^{(n)}$ existe mais elle n'est pas continue $\Rightarrow f_{2n} \notin C^n(\mathbb{R})$

$f_{2n+1} = x^{2n+1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $n \geq 0$

$f_{2n+1} \in C^n(\mathbb{R})$, $f_{2n+1}^{(n+1)}$ n'existe pas.

(compléter l'exercice avec un raisonnement par induction).

6: (Formule de Leibnitz). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivables sur I, où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le produit fg est n fois dérivable sur I et la dérivée d'ordre n de fg est donnée par

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Sol : Rappel : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

On utilise l'expression de la dérivée d'un produit et on procède par récurrence.

. $n=1$: fg dérivable (produit de fonctions dérivables)

$$(fg)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)}$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)}$$

. Hypothèse de récurrence : Dérivables avec :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

. Hérédité : $n+1$: fg $n+1$ fois dérivable (somme et produits fonctions dérivables)

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$k+1 = k'$

$k = k'-1$

$$= \sum_{k'=1}^{n} \binom{n}{k'-1} f^{(k')} g^{(n-k'+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)}$$

$$\left(\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k\,n! + (n-k+1)\,n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{\cancel{k\,n!} + (n+1)\,n! - \cancel{k\,n!}}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k} \right)$$

$$= f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g^{(0)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)}$$

$\square$

7.- (Inégalité des accroissements finis). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < \infty$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

i) Montrer :

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|$$

ii) Montrer qu'une fonction $f \in C^1([a,b])$ est Lipschitz.

Sol : i) On est dans les conditions du théorème des accroissements finis, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Alors

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Et

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right| \leq |f'(c)| \leq \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|$$

Donc

$$|f(b)-f(a)| \leq \underbrace{|b-a|}_{=b-a>0} \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)|$$

<u>Remarque</u>: En dimensions supérieures on a pas "une égalité" des accroissements finis. Par contre, (une version de) l'inégalité est toujours valable.

ii) Vu que $f \in C^1[a,b]$, elle est au $C^1([x,y])$ pour $a \leq x < y \leq b$. Alors par le théorème de Weierstrass f' (continue) atteint son maximum en $[a,b]$, c.à.d.

$$0 \leq \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)| = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| = C < \infty$$

Et $\forall x,y$; avec $a \leq x < y < b$, on a:

$$|f(y)-f(x)| \leq |y-x| \sup_{x\in]x,y[} |f'(x)| \leq$$

$$|y-x| \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)| = C|y-x|$$

c'est à dire $\exists\, C \geq 0$ constante tel que:

$$|f(y)-f(x)| \leq C|y-x| \quad \forall x,y \in [a,b]$$

$$C = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

$\square$

8. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que:

i) $\ln(1+x) \leq x$, pour tout $x > -1$.

ii) $e^x \geq 1+x$, pour tout réel.

iii) $\sin x \leq x$, pour tout $x \geq 0$

iv) $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$, pour tout $x \geq 0$.

v) $|x-y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2|x-y|$, pour $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

<u>Sol</u>:

i) • Si $x=0$, $\ln(1+0) = \ln(1) = 0 \leq 0$, OK

• Si $x \neq 0$, d'après le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $f: [0, x] \to \mathbb{R}$, $f(y) = \ln(1+y)$ (ou $f: [x, 0] \to \mathbb{R}$) qui est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ (respectivement, continue sur $[x, 0]$, dérivable sur $]x, 0[$),

$\exists\, c \in]0, x[$ (ou $]x, 0[$) tel que

$$f(x) - f(0) = (x-0)\, f'(c)$$

C'est à dire:

$$\ln(1+x) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = x \frac{1}{1+c}$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

Si $x > 0$, alors $c > 0 \Rightarrow \frac{x}{1+c} < x \Rightarrow \boxed{\ln(1+x) < x, x > 0}$

Si $-1 < x < 0$, alors $c < 0 \Rightarrow 1+c < 1$

$$\frac{1}{1+c} > 1$$

$$\frac{x}{1+c} < x \quad (\text{car } x < 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1+x) < x, \quad -1 < x < 0}$$

ii) $e^x \geq 1+x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- Si $x=0$, $\left.\begin{matrix} e^0 = 1 \\ 1+0=1 \end{matrix}\right\}$ Ok

- Si $x \neq 0$, avec $\begin{matrix} f: [0,x] \to \mathbb{R} \\ y \mapsto e^y \end{matrix}$ $\left(\text{ou } \begin{matrix} f: [x,0] \to \mathbb{R} \\ y \mapsto e^y \end{matrix} \right)$

continue en $[0,x]$, dériv. en $]0,x[$, par le th. accroissements finis $\exists c \in]0,x[$ tel que $(f'(y) = e^y)$

$$e^x - e^0 = (x-0)\, e^c$$

$$e^x - 1 = x e^c \qquad \text{(de même si } x<0)$$

Si $x>0$, $c>0 \Rightarrow e^c > 1 \Rightarrow e^x - 1 > x$

Si $x<0$, $c<0 \Rightarrow e^c < 1 \underset{x<0}{\Rightarrow} \left. e^c x > x \right\} \Rightarrow e^x - 1 > x$

$\Rightarrow \boxed{e^x - 1 > x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}}$

iii) $\sin x \leq x$, $\forall x \geq 0$

- si $x=0$, $\sin 0 = 0$ Ok

- Si $x>0$, on considère $\begin{matrix} f: [0,x] \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \sin y \end{matrix}$, cont. en $[0,x]$ et dériv. en $]0,x[$, alors par le theorème des accroissem. finis, $\exists c\ ]0,x[$ tel que $(f'(y) = \cos(y))$

$$\sin x - \sin(0) = (x-0)\cos(c)$$

$$\sin x = x \underbrace{\cos(c)}_{\leq 1} \leq x$$

$\Rightarrow \boxed{\sin x \leq x \ , \ \forall x > 0}$

iv) • Si $x=0$

$\frac{0}{1+0} = 0$

$\arctan(0)=0$ } ok

• Si $x>0$, on considère $f : [0,x] \to \mathbb{R}$, $f(y) = \arctan(y)$

cont. sur $[0,x]$, dériv. sur $]0,x[$, alors $\exists c \in]0,x[$

tel que $\left(f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \right)$:

$$\arctan x - \arctan 0 = (x-0) \frac{1}{1+c^2}$$

$$\arctan x = \frac{x}{1+c^2}$$

Or, $0<c<x \Rightarrow 0<c^2<x^2 \Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2$

$\Rightarrow 1 > \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$ $\begin{cases} \Rightarrow \frac{x}{1+c^2} > \frac{x}{1+x^2} \\ \Rightarrow \frac{x}{1+c^2} < x \end{cases}$

Donc

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$$

v) $|x-y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2|x-y|$, $x,y \in [-\pi/4, \pi/4)$

• Si $x=y$

$\tan x = \tan y$ } ok

• Si $x \neq y$, on considère $x<y$ et $x,y \in [-\frac{\pi}{4}, \pi/4]$

$$f : [x,y] \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \tan z$$

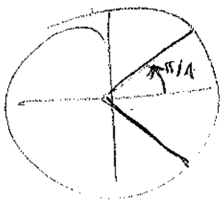
Alors f continue sur $[x,y]$, dériv. sur $]x,y[$

Par le théorème des accroissement finis, $\exists c \in]x,y[$ tel que $\left(f'(z) = \frac{1}{\cos^2(z)} \right.$

$$\tan y - \tan x = \frac{(y-x)}{\cos^2(c)}$$

$$\Rightarrow |\tan x - \tan y| = \frac{|x-y|}{\cos^2 c}$$

Or $c \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos c < 1$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \cos^2 c < 1$$

$$2 > \frac{1}{\cos^2 c} > 1 \Rightarrow 2|x-y| > \frac{|x-y|}{\cos^2 c} > |x-y|$$

Et donc

$$\boxed{2|x-y| > |\tan x - \tan y| > |x-y|} \quad \forall x,y \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}]$$

9.) (Application du théorème des accroissements finis : croissance de la série harmonique).

Montrer :

i) Pour tout $x > -1$

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \frac{1}{1+n} \leq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$

On considère $f :]-1, \infty[$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

- Si $x = 0$, on a l'égalité $0 = 0 = 0$

- Si $x > 0$, la restriction $f : [0, x] \to \mathbb{R}$ est continue en $[0, x]$ et dérivable en $]0, x[$. Alors $\exists c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c)\,(x - 0) \quad , \quad 0 < c < x$$

On a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

Alors $\quad \ln(1+x) = \frac{1}{1+c}\, x \quad , \quad 0 < c < x$

Vu que $\quad \underset{c>0}{\frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+0}} = 1$

$$\underset{c<x}{\frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+x}}$$

On a $(x > 0)$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

- Si $-1 < x < 0$, $f : [x, 0] \to \mathbb{R}$ cont. en $[x, 0]$, dériv. en $]x, 0[$, alors $\exists c$ $\quad x < c < 0$, tel que

$$f(0) - f(x) = f'(c)\,(0 - x)$$

$$-\ln(1+x) = \frac{1}{1+c}(-x) \Leftrightarrow \ln(1+x) = \frac{1}{1+c}\, x$$

Et on a ($x<c<0$)

$$\frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+x}$$

En multipliant par $x<0$

$$\frac{1}{1+c}x < x$$

$$\frac{1}{1+c}x > \frac{x}{1+x}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x} \qquad x>-1 \qquad \left(\text{Noter : } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \ , \ x>0\right)$$

En particulier, si $x = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \leq \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\ln(n+1)-\ln(n)} \leq \frac{1}{n}$$

$$\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+n} < \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

(i) Prouver par recurrence :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour $n=1$

$$\prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1+1 = n+1$$

$$(n=2 \quad \prod_{k=1}^{2}\left(1+\frac{1}{k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \cancel{2}\cdot\frac{2+1}{\cancel{2}} = 2+1 = n+1$$

- Hypothèse de récurrence : cas n.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$$

- Hérédité : $n+1$

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\cancel{(n+1)}\,\frac{n+1+1}{\cancel{n+1}}=(n+1)+1 \qquad \square$$

Alors, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

(iii) Utiliser les points i) et ii) pour montrer :

a) La série $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

On a $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\underset{\frac{1}{n}>\ln(1+\frac{1}{n})\ (\text{point i}))}{>}\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\dots+\ln(1+\frac{1}{n})$

$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\underset{\text{point ii)}}{=}\ln(n+1)$$

Alors $\ln(n+1)\leqslant s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Vu que $\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$

on a que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}=\lim_{k\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$

Remarque:

Pour montrer que la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, on a pas besoin des inégalités en i) et le résultat en ii).

On peut simplement voir:

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} + \left(\underbrace{\frac{1}{5}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{1/2} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Et quand $n \to \infty$ ce terme n'est pas borné.

L'intérêt de majoration dans i) est qu'elles nous permettent d'évaluer la "vitesse" de la croissance de la série harmonique, comme on voit dans les points suivantes.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0 .$$

Sol: En effet, directement de:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$
$$\iff u_n > 0 .$$

c) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec:

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

est décroissante.

Sol: $$w_{n+1} - w_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right)$$
$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n =$$

$$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) < 0$$

Par

$$\frac{1}{1+n} < \ln(n+1) - \ln(n)$$

Alors $w_{n+1} - w_n < 0$, C.à.d $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est decroissante.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \sum_{k=1}^{n} u_n \leq w_n$$

Sol: $u_k > 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} u_k > 0$.

D'autre part

$$0 < \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)}_{>0} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left(\ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln \underbrace{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Étant donné que $\ln(x)$ est croissante:

$$\ln(n+1) > \ln n \Leftrightarrow -\ln(n+1) < -\ln(n)$$

Alors

$$0 < \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) < \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)}_{w_n} =$$

Alors $\boxed{0 < \sum_{k=1}^{n} u_k < w_n}$

e) La limite (constante d'Euler - Mascheroni)

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

existe.

Sol: Autrement la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite :

$$\lim_{n \to \infty} w_n = \gamma$$

Ceci, se suit du fait que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et bornée inférieurement (par 0), alors w_n est convergente et $\gamma = \lim_{n \to \infty} w_n \geq 0$.

On peut voir que $\gamma \leq 1$.

En effet, si on utilise $\frac{1}{1+n} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1+k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{(n-1)+1} \leq 0$$

$$-1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n}_{w_n} \leq 0$$

Alors

$$w_n \leq 1$$

On a vu $0 \leq w_n \leq 1$, décroissante. Alors $\exists \gamma = \lim_{n \to \infty} w_n$ et $\gamma \in [0, 1]$.

(En fait, on a: $\gamma = 0.5772156\ldots$
Question ouverte: Est-ce que $\gamma \in \mathbb{Q}$?)

10. (Théorème des accroissements finis généralisé). Étant donné $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues en $[a,b]$ et dérivables en $]a,b[$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\left(f(b) - f(a)\right) \cdot g'(c) = \left(g(b) - g(a)\right) \cdot f'(c)$$

Sol :

On considère $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, avec :

$$h(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{pmatrix}$$

Si on développe le déterminant, on obtient :

$$h(x) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(b) & g(b) \end{pmatrix}$$

$$+ 1 \cdot \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(a) & g(a) \end{pmatrix}$$

$$= \left(f(a)\, g(b) - f(b)\, g(a)\right) - \left(f(x)\, g(b) - f(b)\, g(x)\right)$$

$$+ \left(f(x) g(a) - f(a)\, g(x)\right)$$

$$= g(x) \left(f(b) - f(a)\right) - f(x) \left(g(b) - g(a)\right) + f(a) g(b) - f(b) g(a)$$

La fonction h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (somme et produit de fonction continues et dérivables).

D'autre part $h(a) = h(b) = 0$ (car c'est le déterminant d'une matrice avec deux lignes répétées, dans ces cas).

D'autre part,

$$h'(x) = g'(x)\left(f(b) - f(a)\right) - f'(x)\left(g(b) - g(a)\right)$$

Alors on peut appliquer le théorème de Rolle, donc

$\exists c \in]a,b[$ où $h'(c) = 0$, et on a :

$$\exists c \in]a,b[\text{ où } 0 = g'(c)\left(f(b) - f(a)\right) - f'(c)\left(g(b) - g(a)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(c)\left(f(b) - f(a)\right) = f'(c)\left(g(b) - g(a)\right)$$

(Remarque : noter qu'on a pas supposé $g'(x) \neq 0$.)

11. (Valeurs approchées)

i) Calculer une valeur approchée de $\sin(0,1)$ en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 à la fonction sinus au point 0. Donner une majoration de l'erreur.

ii) Même question pour $\arctan(1,01)$ en écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 au point 1.

Sol.:

i) On considère la fonction $f : [0,x] \to \mathbb{R}$
$y \longmapsto \sin y$

$f \in C^4[0,x]$ et 5 fois dérivable en $]0,x[$ (en fait $f \in C^\infty[0,x]$)

Alors on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange, et $\exists c \in]0,x[$ tel que:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(IV)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(V)}(c)}{5!}(x-0)^5$$

Or $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos(x)$
$f^{(IV)}(x) \sin x$, $f^{(V)}(x) = \cos(x)$

Donc

$$\sin x = \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \underbrace{\cos(0)}_{=1} x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 + \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos(c)}{5!}x^5$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos(c)}{5!}x^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos(c)}{120}x^5$$

Pour $x = 0,1$, on a :

$$\sin(0,1) = \underbrace{0,1 - \frac{0,1^3}{6}}_{\simeq 0,0998333} + \frac{\cos(c)(0,1)^5}{120}$$

Et pour l'erreur $\varepsilon = \left|\frac{\cos(c)(0,1)^5}{120}\right| \underset{|\cos c| \leq 1}{\leq} \left|\frac{(0,1)^5}{120}\right| \simeq 8 \cdot 10^{-8}$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(0,1) \simeq 0,0998333 \\ \text{avec un erreur } \varepsilon \lesssim 8 \cdot 10^{-8} \end{array}}$$

(i) On considère la fonction $f : [1, x] \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \arctan(y)$

$f \in C^1[1,x]$ et 2 fois derivable en $]1, x[$, alors $\exists$ $c \in]1, x[$ tel que

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2$$

Or $f(x) = \arctan x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

donc

$$\arctan x = \overbrace{\arctan 1}^{\pi/4} + \frac{1}{1+1}(x-1) - \frac{2c}{2!(1+c^2)^2}x^2$$

Et on a

$$\arctan(1,01) = \frac{\pi}{4} + \frac{0,01}{2} + \frac{c}{(1+c^2)^2}(0,01)^2$$

Donc, $\boxed{\arctan(1,01) \simeq \frac{\pi}{4} + \frac{0,01}{2} \simeq 0,79039}$

avec un erreur :

$$\boxed{\varepsilon = \left|(0,01)^2 \frac{c}{(1+c^2)^2}\right| \underset{\substack{\frac{c}{(1+c^2)^2} < c < 1,01 \\ 1<c}}{\leq} \left|(0,01)^2 \cdot 1,01\right| \simeq 10^{-4}}$$

12. (Application de la formule de Taylor-Lagrange). Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.

i) Estimer l'erreur du calcul ε_n de $\sin(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, pour le polynôme de Taylor à l'ordre n en x_0 et justifier que $\forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| < \delta$.

ii) Calculer $\sin(1)$ avec une erreur ε tel que $|\varepsilon| < 10^{-5}$.

Sol:

On va utiliser (Taylor-Lagrange):

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x_0-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1} \qquad a < c < x_0$$

On vérifie:

$$f^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \in C^n[a, x_0], f^{n+1} \text{ dérivable en }]a, x_0[$$

En particulier, on peut appliquer Taylor-Lagrange et écrire:

$$\sin(x) = \sin(0) + x \sin\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2!}\sin\pi + \dots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + \sin\left(c + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\frac{x^{n+1}}{n!}$$

On connaît pas $c \in]0, x[$, mais on peut estimer l'erreur qu'on fait en approximant par $P_n(x)$:

$$|\varepsilon_n| = \left|\sin\left(c + \frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

Si on veut faire une erreur plus petit qu'une quantité δ il faut trouver un n tel que

$$\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} < \delta$$

Il suffit de montrer que $\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$ converge à 0.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite avec $u_n>0$, s'il existe $0<K<1$, tel que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k$, alors $u_n \to 0$,

En effet : $0 \leq |u_{n+1}| \leq K|u_n| \leq K^2|u_{n-1}| \leq \ldots \leq K^{n+1}|u_0|$

Si $0<k<1$ on a $k^{n+1} \to 0$, alors (par les gendarmes) $|u_n| \to 0$

et $u_n \to 0$.

De cette manière, si on applique à $u_n = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$$

Alors pour $0<k<1$, $\exists$ n tel que $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{|x|}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq K$

On peut conclure que $\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \to 0$.

Alors $\forall \delta>0$, $\exists$ n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ $E_n \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \delta$.

(ii) Pour calculer $\sin(1)$ avec un erreur $\epsilon < 10^{-5}$

On a que
$$\epsilon \leq \frac{|1|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

On calcule :

$n=1$	$2! = 2$
$n=2$	$3! = 6$
$n=3$	$4! = 24$
$n=4$	$5! = 120$
$n=5$	$6! = 720$
$n=6$	$7! = 5040$
$n=7$	$8! = 40320$ $\longrightarrow \frac{1}{9!} < 10^{-5}$
$n=8$	$9! = 362880$

Alors : $P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{7!}$

$\sin(1) = P_8(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{7!} = \dots = 0.8414\dots$

$\epsilon < 10^{-5} = 0.00001$

13. (voir après Ex. 14)

14. (Développements limités). Montrer que si f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n, alors il est unique.

Sol :

Si $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0, c'est à dire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \underbrace{\varepsilon_n(x)(x-x_0)^n}_{o((x-x_0)^n)} \quad (*)$$

C'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0$$

alors, $f(x)$ admet un développement en x_0 d'ordre $n-1$, donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-x_0)^k + \varepsilon_{n-1}(x)(x-x_0)^{n-1}$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_{n-1}(x) = 0$

En effet, on réécrit $(*)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \varepsilon_n(x)(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-x_0)^k + a_n (x-x_0)^n + \varepsilon(x)(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-x_0)^k + \underbrace{\left((a_n + \varepsilon(x))(x-x_0)\right)}_{\varepsilon_{n-1}(x)}(x-x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

et on a : $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Remarque :

Noter qu'on peut déterminer les coefficients du développement limité à un ordre, à partir des coefficients de l'ordre précédent :

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0}$$

$$- - -$$

$$a_n = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x-x_0) - \dots - a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}$$

Ça fixe les coefficient d'une manière unique. Et ça suffit pour la preuve

On peut la faire, néanmoins, d'une manière systématique :

Supposons qu'il y a deux développements limités en x_0 à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \varepsilon(x)(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + \tilde{\varepsilon}(x)(x-x_0)^n$$

On va montrer par récurrence que $a_k = b_k \ \forall k = \{0, \dots, n\}$

À l'ordre 0 :

$$f(x) = a_0 + \varepsilon_0(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon_0(x) = 0$$

$$f(x) = b_0 + \tilde{\varepsilon}_0(x), \quad \text{"} \quad \lim_{x \to x_0} \tilde{\varepsilon}_0(x) = 0$$

Ainsi $0 = (a_0 - b_0) + \underbrace{\lim_{x \to x_0} (\varepsilon_0(x) - \tilde{\varepsilon}_0(x))}_{0} = a_0 - b_0 \Rightarrow a_0 = b_0$

Si on suppose $a_k = b_k$, $\forall k \in \{0, \dots, m-1\}$, on a deux développements à l'ordre m, donnés par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x-x_0)^k + a_m(x-x_0)^m + \varepsilon_m(x)(x-x_0)^m$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(x-x_0)^k + b_m(x-x_0)^m + \tilde{\varepsilon}_m(x)(x-x_0)^m$$

Alors, si on fait la différence :

$$0 = \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{(a_k - b_k)}_{=0} (x-x_0)^k + (a_m - b_m)(x-x_0)^m + \left(\varepsilon_m(x) - \tilde{\varepsilon}_m(x)\right)(x-x_0)^m$$

par hypothèse de récurrence.

Alors,

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{(a_m - b_m)(x-x_0)^m}{(x-x_0)^m} + \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\varepsilon_m(x) - \tilde{\varepsilon}_m(x)\right)(x-x_0)^m}{(x-x_0)^m}$$

$$= (a_m - b_m) + \underbrace{\lim_{x \to x_0} \left(\varepsilon_m(x) - \tilde{\varepsilon}_m(x)\right)}_{=0} = a_m - b_m \Rightarrow a_m = b_m$$

Donc $a_k = b_k \ \forall k = \{0, 1, \dots, n\}$

$\square$

13. Montrer en utilisant la formule de Taylor-Lagrange que:

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x>0$, $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

ii) $\forall x>0$, $x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$

iii) $\forall x>-1$, $\ln(1+x) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$

v) $\forall x$, avec $|x|<\pi$, $\ln(1+\cos x) \leq \ln 2 - \frac{x^2}{4}$

Sol:

i) $f : [0,x] \to \mathbb{R}$
$y \mapsto e^x$

$f \in C^n[0,x]$, f $(n+1)$ fois dérivable sur $]0,x[$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
alors par le Théorème de Taylor-Lagrange,

$\exists c \in]0,x[$ tel que:

$$e^x = e^0 + e^0 x + \frac{e^0 x^2}{2!} + \dots + \frac{e^0 x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}}_{>0}$$

$$> 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

Donc $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x>0$

(i) On considère : $f : [0, x] \to \mathbb{R}$
$y \mapsto \ln(1+y)$

$f \in C^2[0,x]$ et 3 fois dérivable sur $]0,x[$, alors par Taylor - Lagrange $\exists c \in]0,x[$ tel que

$$\ln(1+x) = \overbrace{\ln(1+0)}^{=0} + \frac{1}{1+0}x - \frac{1}{2!\,(1+0)^2}x^2 + \frac{2}{3!\,(1+c)^3}x^3$$

(où $f(y) = \ln(1+y)$, $f'(y) = \frac{1}{1+y}$, $f''(y) = \frac{-1}{(1+y)^2}$, $f''' = \frac{2}{(1+y)^3}$)

C'est a dire :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^3}{3(1+c)^3}}_{>0} > x - \frac{x^2}{2}$$

Donc $\forall x > 0$

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

(ii) Comme dans l'exercice précédent.
On montre : $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{n!\,(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow \left(\ln(1+x)\right)^{(n)} = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$

Comme dans (i) on a alors $\exists c \in]0,x[$ (ou $c \in]x,0[$) tel que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \underbrace{- \frac{x^4}{4!}\frac{3!}{(1+x)^4}}_{<0,\ \forall x > -1} < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Donc $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Remarque : Noter (i) avec (ii) donnent :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

iv) On considère :

$$f : [0,x] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \left(\text{ou} \quad f : [x,0] \longrightarrow \mathbb{R} \right)$$
$$\quad y \longmapsto \sin(y) \qquad \qquad \qquad y \longmapsto \sin(y)$$

$f \in C^2[0,x]$ et f est 3 fois dérivable sur $]0,x[$,

alors par Taylor-Lagrange $\exists c \in]0,x[$ tel que

$$\sin x = \sin(0) + \cos(0)x + \frac{\sin(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(c)}{3!}x^3$$

C'est à dire :

$$\sin x = x - \frac{\cos(c)}{3!}x^3$$

Donc

$$|\sin x - x| = \left| -\frac{\cos(c)}{3!}x^3 \right| \leq \frac{|x|^3}{6}$$

C'est à dire, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}}$$

v) • Si $x = 0$, OK

• On considère :

$$f : [0,x] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \left(\text{ou} \quad f : [x,0] \to \mathbb{R} \right)$$
$$\quad y \longmapsto \ln(1+\cos y) \qquad \qquad y \longmapsto \ln(1+\cos y)$$

$f \in C^2[0,x]$ et f est 3 fois dérivables sur $]0,x[$

alors, par Taylor-Lagrange $\exists c \in]0,x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

D'autre part :

$$f(y) = \ln(1+\cos y)$$

$$f'(y) = \frac{-\sin(y)}{1+\cos y}$$

$$f''(y) = \frac{-\cos(y)(1+\cos y) + \sin(y)(-)\sin(y)}{(1+\cos y)^2} = \frac{-\cos y \underbrace{- \cos^2 y - \sin^2 y}_{-1}}{(1+\cos y)^2}$$

$$= \frac{-1-\cos y}{(1+\cos y)^2} = \frac{-1}{1+\cos y}$$

$$f'''(y) = \frac{-\sin y}{(1+\cos y)^2}$$

Donc nous pouvons écrire :

$$\ln(1+\cos(x)) = \ln(1+\cos(0)) - \frac{\sin(0)}{1+\cos(0)} x - \frac{1}{2!} \frac{1}{1+\cos 0} x^2$$

$$- \frac{1}{3!} \frac{\sin(c)}{(1+\cos(c))^2} x^3$$

$$= \ln(2) - \frac{1}{2}\frac{1}{2} x^2 - \frac{x^3 \sin(c)}{6(1+\cos(c))^2}$$

Si $x \in]0,\pi[$, alors $\sin(c) > 0 \Rightarrow -\frac{x^3}{6} \frac{\sin(c)}{(1+\cos(c))^2} < 0$

Si $x \in]-\pi,0[$ " $\sin(c) < 0 \Rightarrow -\frac{x^3}{6} \frac{\sin(c)}{(1+\cos(c))^2} < 0$

$x<0$

Donc $\forall x \in]-\pi,\pi[\setminus \{0\}$

$$\ln(1+\cos(x)) < \ln(2) - \frac{x^2}{4}$$

Et $\forall x, |x| \leq \pi$

$$\ln(1+\cos(x)) \leq \ln(2) - \frac{x^2}{4}$$

15. (Théorème de l'Hôpital, version faible)

Si f, g sont dérivables, $g'(x) \neq 0$, dans un intervalle ouvert autour x_0 et $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Sol:</u>

$\forall x \in I$, $x \neq x_0$ on definit $f, g : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ (ou $[x, x_0] \to \mathbb{R}$).

f, g sont dans les hypothèse de théorème de Cauchy.

(f, g, continues en $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, $g'(x) \neq 0$. alors $\exists\, c \in [a,b]$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$)

Alors, $\exists\, c_x \in]x_0, x[$ tel que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0}}{g(x) - \underbrace{g(0)}_{=0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

En utilisant,

$$0 \leq |c_x - x_0| < |x - x_0|$$

on a

$$\lim_{x\to x_0} c_x = x_0$$

Alors, on peut écrire (sous l'hypothèse d'existence de la limite, alors, en termes de suites, la limite est indépendante de la suite $x_n \to x_0$),

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Et on a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \square$$