2019/20

Mathématiques Math2A (Analyse 2)

TD5

Les exercices marqués avec $(*)$ sont d'approfondissement/complémentaires. Il est conseillé de les abordés après avoir maîtrisé le reste des exercices.

1. (*) (*Formule de Taylor avec reste intégral*). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + ... \\ &\quad ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)\, dt\,. \end{aligned}$$

2. (*) Étant donnée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone non-décroissante, montrer que f est intégrable.

3. (*) (*Inégalités de Schwarz et de Minkowski*). Étant données $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables :
   i) Montrer l'inégalité de Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right) .$$

   ii) Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

4. Étant données $f : I \to J$ dérivable et $g : J \to \mathbb{R}$ continue, avec I, J intervalles et $a \in J$, on définit :

$$\begin{aligned} &F : I \to \mathbb{R} \\ &F(x) = \int_a^{f(x)} g(t)dt \ . \end{aligned}$$

   i) Justifier que F est dérivable et évaluer sa dérivée.
   ii) Calculer la dérivée (si possible) de :

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &F(x) = \int_0^{\sin(x)} t^2 e^t dt \ . \end{aligned}$$

5. (*Calcul d'intégrales*).

i) Étant donnée la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, avec $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, évaluer

$$I_1 = \int_0^1 f(x)dx \ .$$

ii) Étant donnée la fonction $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, avec $g(x) = e^x \cos x$, évaluer

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \ .$$

iii) Étant donnée la fonction $h : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, avec $h(x) = \cos^n(x)$, évaluer

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx \ .$$

6. (*) (*Formule (faible) de Stirling ; expression intégrale de la factorielle*).

i) Montrer que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x\ln(x) - x \ ,$$

est une primitive du $\ln(x)$.

ii) Montrer, pour tout $n \geq 1$

$$n\ln(n) - n < \ln(n!) < n\ln(n) \ .$$

[*Suggestion* : majorer une intégrale de $\ln(x)$ par une somme de Riemann appropriée].

iii) Conclure (formule de Stirling, version faible)

$$\ln(n!) \sim n\ln(n) \ .$$

iv) Montrer (Euler)

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \ .$$

[*Suggestion* : utiliser l'intégration par parties et raisonner par récurrence].