TD5

1.- (Formule de Taylor avec reste intégral). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \in C^{n+1}(I)$. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th)\, dt$$

Sol:

On ré-écrit d'abord le reste intégral avec le changement de variables $s = x_0 + th$

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)\,dt = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_{x_0}^{x_0+h} \left(1 - \frac{s-x_0}{h}\right)^n f^{(n+1)}(s) \frac{ds}{h}$$

$$\begin{cases} s = x_0 + th \\ ds = h\,dt \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 \to s = x_0 + h \\ t = 0 \to x_0 \end{cases}$$

$$t = \frac{s - x_0}{h}$$

$$= \frac{h^{n+1}}{n!} \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(h - s + x_0)^n}{h^{n+1}} f^{(n+1)}(s)\,ds = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0 + h - s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds$$

Si on écrit $x = x_0 + h$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s)\,ds \quad (*)$$
pour $f \in C^{n+1}(I)$

On va prouver la formule par récurrence:

- $n = 0$. Si f est de classe C^1, $\exists f'$ continue et on a:

$$\int_{x_0}^{x} f'(s)\,ds = f(x) - f(x_0)$$ (par le théorème fondamental de l'analyse)

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s)\,ds$$

qui est la formule $(*)$ pour $n = 0$.

- Hypothèse de récurrence : on suppose que $(*)$ est vraie pour n, $f \in C^{n+1}(I)$.

- Hérédité : cas $n+1$.

On suppose $f \in C^{(n+1)+1}(I) = C^{n+2}(I)$.

Alors si on considère :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s)\,ds \underset{?}{=}$$

(intégration par parties) $u = f^{(n+1)}(s) \to du = f^{(n+2)}(s)$

$dv = \frac{(x-s)^n}{n!}ds \to v = \frac{-1}{(n+1)!}(x-s)^{n+1}$

$$= \left[f^{(n+1)}(s) \frac{(-1)}{(n+1)!} (x-s)^{n+1} \right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{(-)(x-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(s)\,ds$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(s)\,ds \qquad (**)$$

Par hypothèse de récurrence.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(s)\,ds$$

Alors, de $(**)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(s)\,ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(s)\,ds$$

qui est l'expression $(*)$ qu'on veut prouver pour $n+1$.

2- Étant donnée $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotone non-décroissante, montrer que f est intégrable.

Sol:

Par hypothèse on a, que pour tout $x, x' \in [a,b]$ on a $x<x' \Rightarrow f(x)\leq f(x')$

On va supposer $f(a) < f(b)$ (sinon f est constante et alors intégrable).

Soit $\varepsilon>0$, On considère une partition $P \in \mathcal{P}[a,b]$ avec

$$\delta(P) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

(rappel $\delta P = \max\{|x_i - x_{i-1}|, i=1,\dots,n\}$ où $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $x_0=a$ $x_n=b$

On écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})) = f(x_1)-f(a) + f(x_2)-f(x_1)+\dots+f(b)-f(x_{n-1})$$
$$= f(b)-f(a)$$

Alors

$$S(f,P)-s(f,P) \overset{\text{on utilise } x<x' \Rightarrow f(x)\leq f(x')}{=} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(\underbrace{M_i}_{\sup\{f(x);\, x\in[x_{i-1},x_i]\}} - \underbrace{m_i}_{\inf\{f(x);\, x\in[x_{i-1},x_i]\}})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

$$< \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))}_{f(b)-f(a)} = \varepsilon$$

Ainsi $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, P\in\mathcal{P}[a,b]$ tel que $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$.

On peut conclure que f est intégrable.

3- (Inégalités de Schwarz et de Minkowski). Étant données $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables :

i) Montrer l'inégalité de Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)$$

ii) Montrer l'inégalité de Minkowski:

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{1/2}$$

Sol: Pour i), soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (quelconque). On a

$$(\lambda f(x) + g(x))^2 \geq 0$$

Alors, on a:

$$0 \leq \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,dx$$

$$= \lambda^2 \int_a^b (f(x))^2\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b (g(x))^2\,dx$$

- Si $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$, on a:

$$2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g(x)^2\,dx \geq 0 \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

La dernière inégalité est possible ssi $\int_a^b f(x)g(x) = 0$ et on a l'inégalité cherchée.

- Si $\int_a^b f^2(x)\,dx > 0$, alors on peut choisir

$$\lambda = -\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

et on a:

$$0 \leq \frac{\left(-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2}{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\cancel{2}}} \cancel{\int_a^b (f(x))^2\,dx} - 2\,\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b f^2(x)\,dx} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

$$+ \int_a^b (g(x))^2\,dx$$

$$0 \leq \frac{-\left(\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right)^2}{\int_a^b f^2(x)\, dx} + \int_a^b g^2(x)\, dx$$

C'est à dire :

$$\frac{\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2}{\int_a^b (f(x))^2\, dx} \leq \int_a^b (g(x))^2\, dx$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 \int_a^b (g(x))^2\, dx$$

Pour (c) on a :

$$\underline{\int_a^b (f+g)^2\, dx} = \int_a^b f^2(x)\, dx + 2\int_a^b f(x) g(x)\, dx + \int_a^b (g(x))^2\, dx$$

$$\leq \int_a^b f^2(x)\, dx + 2\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| + \int_a^b g(x)^2\, dx$$

$$\underset{\text{Schwarz}}{\leq} \int_a^b f^2(x)\, dx + 2\left(\int_a^b f^2(x)\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2\right)^{1/2} + \int_a^b g(x)^2 dx$$

$$\underline{= \left(\left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)^{1/2}\right)^2}$$

4. Étant données $f: I \to J$ dérivable et $g: J \to \mathbb{R}$ continue, avec I, J intervalles, on définit :

$$F: I \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = \int_a^{f(x)} g(t)\, dt$$

i) Justifier que F est dérivable et évaluer sa dérivée.

ii) Calculer la dérivée (si possible) de :

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} t^2 e^t \, dt.$$

Sol:

i) On définit d'abord :

$$G: J \to \mathbb{R}$$
$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$$

Donné que g est continue, on a que G est dérivable avec $G'(x) = g(x)$.

On peut écrire

$$F: I \to \mathbb{R}$$

comme :

$$F = G \circ f : I \to J \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = G(f(x)) = \int_a^{f(x)} g(t)\, dt$$

Alors, donné que f et G sont dérivables on a que F est dérivable avec (en utilisant la dérivation en chaîne):

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$= g(f(x)) \cdot f'(x)$$

ii) Pour $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{\sin x} t^2 e^t \, dt$$

on a que $t^2 e^t$ est continue et $\sin(x)$ dérivable, alors F est dérivable, avec :

$$F'(x) = \left((\sin(x))^2 \, e^{\sin(x)} \right) \cdot \cos(x)$$

5. (Calcul d'intégrales)

i) Étant donnée la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, avec $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, évaluer :

$$I_1 = \int_0^1 f(x) \, dx$$

ii) Étant donnée la fonction $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, avec $g(x) = e^x \cos(x)$, évaluer

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx$$

iii) Étant donnée la fonction $h : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, avec $h(x) = \cos^4(x)$, évaluer

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} h(x) \, dx.$$

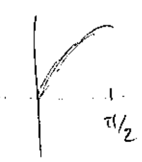
Sol : i)

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Nous pouvons définir le changement de variable

$$x = \sin t$$

qui correspond à : $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$
$t \mapsto \sin(t)$



avec g croissante, dérivable et g' intégrable.

On a alors :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \, \cos t \, dt$$

$$\left(\begin{array}{l} I_1 = \int_a^b f(x) \, dx = \int_A^B f(g(t)) \, g'(t) \, dt \\ \text{avec} \quad g : [A,B] \to [a,b], \; g(A) = a, \; g(B) = b \\ g \text{ croissante, dérivable et } g' \text{ intégrable} \end{array} \right)$$

Alors

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t \; dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \; dt$$

Si on utilise maintenant :

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1-\cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1$$

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

On a :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left(\left[t\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left[\sin 2t\right]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sin\pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right) = \pi/4$$

(c) $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(x)\, dx$

Nous faisons une intégration par parties :

$$u(x) = e^x \qquad u'(x) = e^x$$
$$v(x) = \sin(x) \qquad v'(x) = \cos(x)$$

et on a :

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u\, v'\, dx = [uv]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u' v\, dx$$

$$= \left[e^x \sin(x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x)$$

$$= \left(e^{\pi} \underbrace{\sin(\pi)}_{0} - e^{-\pi} \underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\right) - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(x)$$

On intègre à nouveau par parties :

$$u(x) = e^x \qquad u'(x) = e^x$$
$$v(x) = -\cos(x) \qquad v'(x) = \sin(x)$$

et on a :

$$I_2 = -\int_{-\pi}^{\pi} u\, v'(x)\, dx = -\left([uv]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u'(x)\, v(x)\, dx\right)$$

$$= -\left(\left[e^x (-)\cos(x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x (-)\cos(x)\, dx\right)$$

$$= -\left(-e^{\pi} \underbrace{\cos\pi}_{-1} + e^{-\pi} \underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} \cos(x)\, dx}_{I_2} \right)$$

Alors

$$I_2 = -e^{\pi} + e^{-\pi} - I_2$$

$$2I_2 = -\left(e^{\pi} - e^{-\pi} \right)$$

$$\boxed{I_2 = -\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = -\sinh(\pi)}$$

iii) $I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx$

- $n = 0$

$$I_3^0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$$

- $n = 1$

$$I_3^1 = \int_0^{\pi/2} \cos^1(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x) = \left[\sin(x)\right]_0^{\pi/2} = \overbrace{\sin(\pi/2)}^{1} - \overbrace{\sin(0)}^{0}$$

$$= 1$$

- $n = 2$

$$I_3^n = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\overset{0}{\sin\pi} - \overset{0}{\sin(0)}}{4} = \pi/4$$

- $n > 2$

$$I_3^n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx$$

Intégration par parties :

$u(x) = \cos^{n-1}(x)$ $\quad$ $u'(x) = (n-1)\cos^{n-2}(x)(-\sin(x))$

$v(x) = \sin(x)$ $\quad$ $v'(x) = \cos(x)$

Alors :

$$I_3^n = \int_0^{\pi/2} u v' \, dx = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u' v \, dx$$

$$= \left[\cos^{n-1}(x)\sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)\cos^{n-2}(x)(-\sin(x))\sin(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\cos^{n-1}(\pi/2)\sin(\pi/2)}_{=0} - \cos^{n-1}(0)\underbrace{\sin(0)}_{0} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2}\left(\cos^{n-2}(x) - \cos^n(x)\right)dx$$

$$= (n-1)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}(x)\,dx - \int_0^{\pi/2}\cos^n(x)\,dx\right)$$

$$= (n-1)\left(I_3^{n-2} - I_3^n\right)$$

C'est à dire :

$$I_3^n = (n-1) I_3^{n-2} - (n-1) I_3^n$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + (n-1)\right) I_3^n = (n-1) I_3^{n-2}$$

$$n I_3^n = (n-1) I_3^{n-2}$$

$$\boxed{I_3^n = \frac{n-1}{n} I_3^{n-2}}$$

On vérifie : $I_3^2 = \frac{2-1}{2} I_3^0 = \frac{1}{2} \cdot I_3^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ ✓

On a ainsi :

- $n = 2k$:

$$\boxed{I_3^{2k}} = \frac{2k-1}{2k} I_3^{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\,\frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{I_3^0}_{\pi/2}$$

$$\boxed{= \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2^k k!}\,\pi/2}$$

- $n = 2k+1$

$$\boxed{I_3^{2k+1}} = \frac{2k}{2k+1} I_3^{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \underbrace{I_3^1}_{1}$$

$$\boxed{= \frac{2^k k!}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}}$$

6.- (Formule (faible) de Stirling; expression intégrale de la factorielle)

i) Montrer que $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x \ln x - x$$

est une primitive de $\ln(x)$

ii) Montrer, pour tout $n \geq 1$

$$n \ln n - n \leq \ln(n!) < n \ln n$$

iii) Conclure

$$\ln n! \sim n \ln n$$

iv) Montrer (Euler)

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

Sol:

i) Il suffit de montrer:

$$f' = \ln(x)$$

En effet: $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

ii) Pour $\ln n! < n \ln n$, on fait simplement:

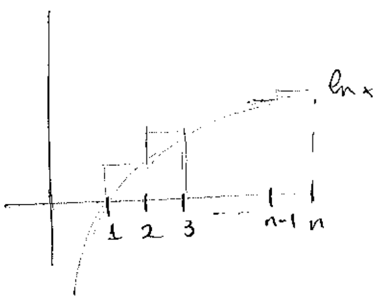
$$\ln n! = \ln(n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1) = \ln n + \ln(n-1) + \ln(n-2) + \cdots + \ln(3) + \ln(2) + \ln(1)$$

$$< \ln n + \ln n + \ln n + \cdots + \ln n + \ln n + \ln n = n \ln n$$

$\uparrow$ $\ln(x)$ strictement croissante

Pour $n \ln n - n \leq \ln n!$:

Méthode 1:



$P = \{1, \ldots, n\}$

On a $S(\ln x, P) \geq \int_1^n \ln x\, dx$

$$S(\ln x, P) = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$$
$$= \ln(2 \cdot 3 \cdots n) = \ln n!$$

Alors

$$\ln n! \geq \int_1^n \underbrace{\ln x}_{\text{intégrable (continue)}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{théorème} \\ \text{fond. calcul}}}{=} f(n) - f(1) = n\ln n - n - (1\cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - 1) = n\ln n - n + 1 \geq$$

$$> n\ln n - n$$

fond. calcul. $f(x) = x\ln x - x$ primitive

Alors, $\quad n\ln n - n < \ln n! < n\ln n$

Méthode 2 :

De $\quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{>0} e^c \qquad c \in]0, x[$ (Taylor-Lagrange)

On a :

$$e^n > \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{n^n}{n!} \Rightarrow n! > \frac{n^n}{e^n}$$

$$\Rightarrow \underline{\ln n! > n\ln n - n}$$

Méthode 3 :

On avait vu que la suite $u_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ est croissante

et $\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$. Alors

$$e > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

En particulier

$$e > \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \quad e > \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \ldots, \quad e > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Ainsi

$$e^{n-1} > (1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$= \cancel{2} \cdot \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 \left(\frac{3+1}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n}{\cancel{n-1}}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!}$$

$$\Rightarrow n! > \frac{n^n}{e^{n-1}} = \frac{e n^n}{e^n} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \ln n! &= \ln e + n\ln n - n\ln e \\ &= 1 + n\ln n - n > \underline{n\ln n - n} \end{aligned}}$$

On a alors

$$n\ln n - n < \ln n! < n\ln n \quad (*)$$

iii) On rappelle : on dit $f \sim g$ au voisinage de "∞" si

$$f(x) = (1+\varepsilon(x))\, g(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$

si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de l'infini ceci est équivalent à

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

si en $(*)$ on divise par $n\ln n$:

$$1 - \frac{1}{\ln n} < \frac{\ln n!}{n\ln n} < 1$$

Ainsi, quand $n\to\infty$, utilisant $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ et le théorème de gendarmes on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n\ln n} = 1$$

C'est à dire :

$$\ln n! \sim n\ln n$$

iv) On va a montrer $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$

par récurrence, en utilisant l'intégration par parties :

. $n=0$

$$0! = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^a = \underbrace{\lim_{a\to\infty} -e^{-a}}_{=0} + 1 = 1$$

- Hypothèse de récurrence :

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

- Hérédité. Cas $n+1$:

$$\int_0^{\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \lim_{a \to \infty} \int_0^a x^{n+1} e^{x} dx$$

$u = x^{n+1}$ $\qquad u' = (n+1)x^n$

$v = -e^{-x}$ $\qquad v' = e^{-x}$

Alors, par parties :

$$= \lim_{a \to \infty} \left(\left[x^{n+1} e^{-x} \right]_0^a - \int_0^a (n+1)\, x^n (-e^{-x}) \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{a \to +\infty} a^{n+1} e^{-a}}_{0} - 0 \cdot 1 + \lim_{a \to \infty} \int_0^a (n+1)\, x^n e^{-x} dx$$

$$= (n+1) \lim_{a \to +\infty} \int_0^a x^n e^{-x} dx = (n+1) \underbrace{\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx}_{n!} = (n+1)!$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx}$$